Educación Media

2

Matemática

Programa de Estudio
Segundo Año Medio

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Matemática

Programa de Estudio
Segundo Año Medio

EDUCACION
Nuestra
Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

Matemática
Programa de Estudio, Segundo Año Medio, Formación General
Educación Media, Unidad de Curriculum y Evaluación
ISBN 956-7933-24-3
Registro de Propiedad Intelectual Nº 111.663
Ministerio de Educación, República de Chile
Alameda 1371, Santiago
Primera Edición 1999
Segunda Edición 2004

Santiago, octubre 1999

Estimados profesores:

El presente programa de estudio de Segundo Año Medio ha sido elaborado por la Unidad de Curriculum y Evaluación del Ministerio de Educación y aprobado por el Consejo Superior de Educación, para ser puesto en práctica, por los establecimientos que elijan aplicarlo, a partir del año escolar del 2000.

En sus objetivos, contenidos y actividades busca responder a un doble propósito: articular a lo largo del año una experiencia de aprendizaje acorde con las definiciones del marco curricular de Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media, definido en el Decreto Nº 220, de mayo de 1998, y ofrecer la mejor herramienta de apoyo a la profesora o profesor que hará posible su puesta en práctica.

Los nuevos programas para Segundo Año Medio plantean objetivos de aprendizaje de mayor nivel que los del pasado, porque la vida futura, tanto a nivel de las personas como del país, establece mayores requerimientos formativos. A la vez, ofrecen descripciones detalladas de los caminos pedagógicos para llegar a estas metas más altas. Así, al igual que en el caso de los programas del nivel precedente, los correspondientes al Segundo Año Medio incluyen numerosas actividades y ejemplos de trabajo con alumnos y alumnas, consistentes en experiencias concretas, realizables e íntimamente ligadas al logro de los aprendizajes esperados. Su multiplicidad busca enriquecer y abrir posibilidades, no recargar ni rigidizar; en múltiples puntos requieren que la profesora o el profesor discierna y opte por lo que es más adecuado al contexto, momento y características de sus alumnos y alumnas.

Los nuevos programas son una invitación a los docentes de Segundo Año Medio para ejecutar una nueva obra, que sin su concurso no es realizable. Estos programas demandan cambios importantes en las prácticas docentes. Ello constituye un desafío grande, de preparación y estudio, de fe en la vocación formadora, y de rigor en la gradual puesta en práctica de lo nuevo. Lo que importa en el momento inicial es la aceptación del desafío y la confianza en los resultados del trabajo hecho con cariño y profesionalismo.

José Pablo Arellano Marín

Ministro de Educación

Presentación

La matemática es una disciplina cuya construcción ha surgido de la necesidad y/o el deseo de responder preguntas, interpretar fenómenos y resolver problemas provenientes de los más variados ámbitos, tanto del mundo de las ciencias naturales, sociales, del arte y de la tecnología como de la matemática misma. La matemática forma parte del acervo cultural de nuestra sociedad.

El Programa de Matemáticas para Segundo Año Medio se sitúa -de la misma manera que el Programa de Primer Año Medio- en la perspectiva del derecho de todas las personas a desarrollar su capacidad de pensar y de interpretar matemáticamente fenómenos, facilitando su incorporación, de manera informada, a una sociedad tecnificada y en constante cambio.

En consecuencia, se continúa en la búsqueda de maneras de enseñar que aprovechen la variedad de talentos, necesidades e intereses que poseen los estudiantes para acercarlos a la matemática, ya sea estimulando a aquellos cuyos intereses se relacionan más con las aplicaciones, a los que se interesan por la modelización o bien a los que les atraen los desafíos de la disciplina misma, brindándoles oportunidades tanto a unos como a otros.

Este programa, así como el de Primer Año, propone la resolución de problemas como eje importante para el aprendizaje de la matemática. Es fundamental que en esta instancia se abran espacios para que los estudiantes respondan preguntas que se hacen entre ellos o que son planteadas por los docentes, que desarrollen sus argumentos, describan, expliquen y defiendan sus procedimientos y estrategias de resolución y que atiendan a las explicaciones y argumentaciones de los demás.

La resolución de desafíos y problemas es un tipo de actividad que permite, además del desarrollo de las capacidades para analizar y relacionar en un contexto diversas temáticas, dar significado a conceptos y procedimientos matemáticos. Esto favorece un aprendizaje significativo, sólido y el desarrollo de una actitud crítica, apoyada en la reflexión, acerca de diversos temas.

Es recomendable generar climas de trabajo en los que tengan cabida la intuición matemática, el análisis de situaciones y procedimientos, la estructuración de conceptos y los procesos de generalización. Asimismo, velar por una participación amplia de los estudiantes, bajo una conducción alerta y con un nivel de exigencia adecuado. Es conveniente dedicar tiempo para debatir acerca de las formas que permiten resolver problemas específicos, los conceptos involucrados, las soluciones encontradas, etc., puesto que el reconocimiento de la diversidad de estrategias posibles y la selección de la(s) mejor(es) es otro aspecto que se enfatiza en este programa.

Continuando con el trabajo desarrollado en Primer Año, para la resolución de determinados problemas es interesante utilizar una calculadora (básica o científica); asimismo, es recomendable que los estudiantes utilicen el computador, particularmente para el desarrollo de trabajos relativos al uso de planilla de cálculo, a la geometría, al diseño y también al álgebra. Ello dependerá de los programas computacionales disponibles en cada establecimiento educacional.

También es importante realizar otro tipo de actividades, como lecturas y/o investigaciones específicas, y posteriores exposiciones sobre estos temas, de modo que el equipo expositor pueda recibir y contestar preguntas. Debe destacarse que no basta con encontrar la información buscada, sino que es necesario clasificarla, organizarla, reelaborarla en una presentación personal. Si la investigación es grupal, debiera también clarificarse la distribución de tareas y responsabilidades.

Organización del programa

El Programa de Estudio para el sector de Matemática se enmarca en las orientaciones que derivan de los Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios y se organiza en torno a seis unidades:

1. Nociones de probabilidades
2. Semejanza de figuras planas
3. Las fracciones en lenguaje algebraico
4. La circunferencia y sus ángulos
5. Ecuación de la recta y otras funciones, modelos de situaciones diarias
6. Sistemas de ecuaciones lineales

La secuencia anual para el trabajo en el aula se puede organizar de variadas formas, considerando diversas secuencias temáticas, estimando el tiempo que se considere adecuado para los aprendizajes en relación con las características del curso y del establecimiento educacional. En este programa el total anual de horas se ha distribuido para dar cabida al tratamiento de las unidades propuestas, estimando un número de horas que deberá ser calibrado por los docentes de acuerdo a las realidades específicas.

En este marco de flexibilidad, se pueden plantear algunas consideraciones específicas. En forma similar al Programa de Primer Año Medio, la secuencia anual combina temas propios de geometría con temas de álgebra: la segunda y cuarta unidades son de geometría.

La unidad 1, **Nociones de Probabilidades** podría tener diversas ubicaciones en la secuencia temática anual. Con el propósito de abrir espacios con características lúdicas que seduzcan a los alumnos y alumnas a estudiar matemática, en este programa constituye la primera unidad.

Necesariamente la unidad 3, **Las fracciones en el lenguaje algebraico,** debe estudiarse antes de trabajar los otros temas relativos a álgebra: **Ecuación de la recta y otras funciones, modelos de situaciones diarias** y **Sistemas de ecuaciones lineales.** En relación con estas dos unidades, se propone desarrollar un trabajo muy relacionado entre ambas.

Organización de las unidades

Cada unidad incluye los siguientes puntos:

- Contenidos
- Aprendizajes esperados
- Orientaciones didácticas
- Actividades para el aprendizaje y ejemplos
- Actividades para la evaluación y ejemplos

A continuación se señalan los aspectos más relevantes de estos elementos constitutivos de cada unidad.

Contenidos

Los contenidos corresponden al marco curricular y se encuentran distribuidos en las seis unidades planteadas. En algunos casos, y con el fin de enfatizar y/o clarificar algunos de ellos, éstos se han desglosado en contenidos más específicos.

Aprendizajes esperados

Expresan las capacidades y competencias que interesa que los alumnos y alumnas desarrollen, considerando los contenidos de cada unidad y los objetivos fundamentales para el año escolar. Los aprendizajes esperados indican las intenciones que orientan el proceso pedagógico y dan un norte al proceso de aprendizaje.

Su número es variable por unidad y, en algunos casos, hay aprendizajes esperados que por su naturaleza están incorporados en algún otro, señalados ambos de manera explícita.

En su elaboración, además de considerar los contenidos y objetivos propuestos para Segundo Año Medio, se consideró como criterio importante las tres categorías señaladas en el marco curricular en cuanto al desarrollo de habilidades referidas al aprendizaje de procedimientos rutinarios, resolución de problemas y estructuración y generalización de conceptos matemáticos. Además, algunos aprendizajes esperados hacen referencia al proceso de comunicación: describir procedimientos, propiedades, organizar ideas e hilar argumentos.

Orientaciones didácticas

En este punto se incorporan precisiones y comentarios pedagógicos, relativos al aprendizaje propio del tema de la unidad.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Las actividades explicitan acciones y procesos que importa e interesa que vivan los alumnos y las alumnas para el logro de los aprendizajes esperados. No existe una correspondencia biunívoca entre los aprendizajes esperados y las actividades; una actividad puede estar al servicio de varios aprendizajes esperados; además, la dinámica que se dé en el desarrollo de la clase puede favorecer más a unos que a otros.

Todas las actividades, salvo casos excepcionales, se complementan con ejemplos específicos y comentarios pedagógicos; el propósito es destacar algunos aspectos del tema o de la situación ejemplificada y presentar sugerencias de trabajo, de organización y también de evaluación sobre el proceso que se desarrolla.

Actividades para la evaluación y ejemplos

La evaluación se considera, como se expresa en el punto anterior, parte del proceso de aprendizaje. Debe proveer al alumnado y al docente de la retroalimentación necesaria como referente para continuar, corregir y orientar las actividades futuras.

En cada unidad se incluye un conjunto de preguntas, propuestas de trabajo, problemas, que consideran los aprendizajes esperados, pero no en una relación uno a uno. La evaluación, en consonancia con el proceso de aprendizaje, también aporta a un proceso de integración y relación entre los conceptos.

Es recomendable que se evalúen diversos aspectos del proceso de enseñanza-aprendizaje, y no sólo los resultados de los diversos ejercicios. Cobra relevancia en esta propuesta observar y evaluar el tipo de razonamiento utilizado, el método empleado, la originalidad de las ideas planteadas.

Objetivos Fundamentales Transversales y su presencia en el programa

Los Objetivos Fundamentales Transversales (OFT) definen finalidades generales de la educación referidas al desarrollo personal y la formación ética e intelectual de alumnos y alumnas. Su realización trasciende a un sector o subsector específico del currículum y tiene lugar en múltiples ámbitos o dimensiones de la experiencia educativa, que son responsabilidad del conjunto de la institución escolar, incluyendo, entre otros, el proyecto educativo y el tipo de disciplina que caracteriza a cada establecimiento, los estilos y tipos de prácticas docentes, las actividades ceremoniales y el ejemplo cotidiano de profesores y profesoras, administrativos y los propios estudiantes. Sin embargo, el ámbito privilegiado de realización de los OFT se encuentra en los contextos y actividades de aprendizaje que organiza cada sector y subsector, en función del logro de los aprendizajes esperados de cada una de sus unidades.

Desde la perspectiva señalada, cada sector o subsector de aprendizaje, en su propósito de contribuir a la formación para la vida, conjuga en un todo integrado e indisoluble el desarrollo intelectual con la formación ético-social de alumnos y alumnas. De esta forma se busca superar la separación que en ocasiones se establece entre la dimensión formativa y la instructiva. Los programas están construidos sobre la base de contenidos programáticos significativos que tienen una carga formativa muy importante, ya que en el proceso de adquisición de estos conocimientos y habilidades los estudiantes establecen jerarquías valóricas, formulan juicios morales, asumen posturas éticas y desarrollan compromisos sociales.

Los Objetivos Fundamentales Transversales definidos en el marco curricular nacional (Decreto Nº 220), corresponden a una explicitación ordenada de los propósitos formativos de la Educación Media en cuatro ámbitos: *Crecimiento y Autoafirmación Personal, Desarrollo del Pensamiento, Formación Ética, Persona y Entorno;* su realización, como se dijo, es responsabilidad de la institución escolar y la experiencia de aprendizaje y de vida que ésta ofrece en su conjunto a alumnos y alumnas. Desde la perspectiva de cada sector y subsector, esto significa que no hay límites respecto a qué OFT trabajar en el contexto específico de cada disciplina; las posibilidades formativas de todo contenido conceptual o actividad debieran considerarse abiertas a cualquier aspecto o dimensión de los OFT.

Junto a lo señalado, es necesario destacar que hay una relación de afinidad y consistencia en términos de objeto temático, preguntas o problemas, entre cada sector y subsector, por un lado, y determinados OFT, por otro. El presente programa de estudio ha sido definido incluyendo (verticalizando), los objetivos transversales más afines con su objeto, los que han sido incorporados tanto a sus objetivos y contenidos, como a sus metodologías, actividades y sugerencias de evaluación. De este modo, los conceptos (o conocimientos) habilidades y actitudes que este programa se propone trabajar integran explícitamente algunos de los OFT definidos en el marco curricular de la Educación Media.

El Programa de Matemática de Segundo Año Medio refuerza algunos OFT que tuvieron presencia y oportunidad de desarrollo durante el Primer Año y adiciona otros propio de las nuevas unidades:

- Los OFT del ámbito *Crecimiento y Autoafirmación Personal* referidos al interés y capacidad de conocer la realidad, utilizar el conocimiento y la información, tomar decisiones fundamentadas.

- Los OFT del ámbito *Desarrollo del Pensamiento*, en especial los relativos a habilidades de investigación, a través de las actividades que suponen selección y organización de información y datos; a habilidades de resolución de problemas y de pensamiento lógico, a través del conjunto de contenidos y actividades orientados al análisis de diversas situaciones, así como a la aplicación de leyes y principios, por un lado, y al aprendizaje de algoritmos o procedimientos rutinarios por otro; y a habilidades de generalización y de modelización a partir de relaciones observadas.
- Los OFT del ámbito *Persona y su Entorno* referidos al trabajo, y que plantean el desarrollo de actitudes de rigor, perseverancia y análisis de sus procedimientos, así como de flexibilidad, originalidad y asunción del riesgo, y las capacidades de recibir y aceptar consejos y críticas.
- A través de los problemas a resolver matemáticamente que plantean las actividades del programa, es posible ampliar el trabajo de los OFT a la capacidad de juicio de alumnos y alumnas, y la aplicación de criterios morales a problemas del medio ambiente, económicos y sociales.

Junto a lo señalado, a través de las sugerencias al docente que explicita, el programa invita a prácticas pedagógicas que realizan los valores y orientaciones éticas de los OFT, así como sus definiciones sobre habilidades intelectuales y comunicativas.

Objetivos Fundamentales

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la ecuación de la recta, sistemas de ecuaciones lineales, semejanza de figuras planas y nociones de probabilidad; iniciándose en el reconocimiento y aplicación de modelos matemáticos.
2. Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.
3. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.
4. Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.
5. Analizar invariantes relativas a cambios de ubicación y ampliación o reducción a escala, utilizando el dibujo geométrico.

Unidades, contenidos y distribución temporal

Cuadro sinóptico

Unidades			
1 Nociones de probabilidades	**2** Semejanza de figuras planas	**3** Las fracciones en lenguaje algebraico	**4** La circunferencia y sus ángulos
Contenidos			
• Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. • Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad. • La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol. • Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el triángulo de Pascal. Interpretaciones combinatorias.	• Semejanza de figuras planas. Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos. • Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada. • Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos. • Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales. Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones. • Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos. Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.	• Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples. • Relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias. • Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números. • Potencias con exponente entero. Multiplicación y división de potencias. Uso e interpretación de paréntesis.	• Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. • Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos. • Uso de algún programa computacional de geometría que permita medir ángulos, y ampliar y reducir figuras.
Distribución temporal			
Tiempo estimado: 25 a 30 horas	Tiempo estimado: 30 a 35 horas	Tiempo estimado: 30 a 35 horas	Tiempo estimado: 20 a 25 horas

5	6
Ecuación de la recta y otras funciones, modelos de situaciones diarias	Sistemas de ecuaciones lineales
• Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramo de consumo, por ejemplo de agua, luz, gas. Variables dependientes e independientes. • Función afín y función lineal. • Ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y del intercepto con el eje de las ordenadas. Condición de paralelismo y de perpendicularidad. • Función valor absoluto; gráfico de esta función. Interpretación del valor absoluto como expresión de distancia en la recta real. • Función parte entera. • Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.	• Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Gráfico de las rectas correspondientes. • Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones. Análisis y pertinencia de las soluciones. • Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones. • Distancia entre dos puntos en el plano. • Evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII; aporte de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría.
Tiempo estimado: 30 a 35 horas	Tiempo estimado: 20 a 25 horas

Unidad 1

Nociones de probabilidades

Contenidos

a. Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos.

b. Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.

c. La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables.
Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.

d. Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el Triángulo de Pascal.
Interpretaciones combinatorias.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Relacionan la noción de probabilidad con la información estadística que deriva de la repetición de un fenómeno aleatorio y explican qué diferencia a éstos de los fenómenos determinísticos.
2. Analizan e interpretan los resultados de problemas que involucran cálculo de probabilidades, considerando experimentos aleatorios simples; explican los procedimientos utilizados; analizan la independencia de los mismos; reconocen los casos de equiprobabilidad.
3. Conocen y utilizan la fórmula de Laplace para el cálculo de probabilidades; comparan probabilidades y analizan su valor máximo y su valor mínimo.
4. Utilizan el Triángulo de Pascal y al diagrama de árbol como técnicas de conteo en la resolución de problemas.
5. Interpretan información de diversos ámbitos, que involucra probabilidades.

Orientaciones didácticas

Las nociones de probabilidad y de lo aleatorio adquieren día a día mayor relevancia en la interpretación de hechos y en el análisis de situaciones. Sin embargo, muchas creencias tiñen la noción de probabilidad con tonos más propios de lo determinístico; son muchas las personas que interpretan que, por ejemplo, como 1/6 es la probabilidad de obtener el as en el lanzamiento de un dado, al lanzarlo 6 veces una de ellas debiera ser as. O bien, que si los números 3 y 15 salieron en el sorteo anterior, no saldrán en el siguiente, creyendo que el azar tiene memoria. Estas creencias pueden tergiversar las opiniones en ámbitos más importantes que los juegos, como la salud pública, indicadores sociales, comportamientos juveniles, publicidad, etc.

Considerando que actualmente el análisis e interpretación de numerosas situaciones hacen referencia al lenguaje probabilístico, es una necesidad contribuir a la construcción del sentido de la probabilidad, entendida como una medida que se establece por el análisis de los resultados de un determinado fenómeno que se repite un gran número de casos. No se puede predecir qué resultado saldrá en el próximo lanzamiento de una dado, pero si se ha experimentado que en mil lanzamientos, en aproximadamente la sexta parte de ellos, vale decir entre 165 y 170 veces, saldrá un as, en otra sexta parte de los lanzamientos saldrá dos, y así para los otros números. Pero, puede ser más interesante aun, conocer estudios estadísticos orientados a establecer la probabilidad de algunos resultados en fenómenos de orden social, político, económico, etc.

El foco central de esta unidad es desarrollar la noción de probabilidad a partir del análisis de situaciones que sean interesantes y motivadoras para las alumnas y los alumnos; es importante que puedan interpretar informaciones referidas a diversos ámbitos, tales como economía, salud, educación, comunicación, diseño de políticas, etc., que involucran y hacen referencia a variables aleatorias.

En esta propuesta se propone el análisis de juegos y fenómenos aleatorios sin enfatizar el uso del vocabulario específico; el concepto de espacio muestral está presente pero no se sistematiza.

En las diferentes actividades que se han seleccionado es conveniente que los estudiantes realicen los juegos y las experiencias propuestas; que manipulen los objetos y reflexionen sobre los resultados; que los grafiquen y analicen en cada caso. Hay numerosos programas computacionales referidos a probabilidades, que incorporan simulaciones con dados, naipes u otras situaciones; con éstos se pueden hacer cien o mil lanzamientos de dos dados en un tiempo breve para, por ejemplo, calcular su suma y graficar los resultados.

Si no se dispone de estos programas específicos, es recomendable trabajar en grupos para la repetición de determinados fenómenos, lo que permite obtener un total de resultados a nivel de curso que hace interesante su estudio por medio de tablas o gráficos. De este modo se pude apoyar la construcción del concepto de probabilidad y su relación con el análisis de los resultados para una gran cantidad de casos. Para hacer los gráficos o tablas se puede recurrir a una planilla de cálculo.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Practican diversos juegos de azar sencillos; tabulan, grafican y analizan los resultados obtenidos e infieren la noción de probabilidad y de fenómeno aleatorio.

Ejemplo A

Lanzar una moneda y registrar el resultado –sello o cara– para cada lanzamiento. Analizar los resultados que se obtienen para 10, 20, 50, 100, 500, 1 000 veces que se lance la moneda. Verificar que los números asociados a la “cara” y al “sello” son diferentes entre sí y que, en la medida de que el número de casos aumenta, se aproximan al 50% del total.

Ejemplo B

Analizar los resultados que se obtienen al lanzar 50, 100, 500 o más veces un dado; registrar estos resultados en tablas y gráficos. Observar cómo las barras tienden a tener la misma altura en el gráfico en la medida en que el número de lanzamientos aumenta.

Ejemplo C

Tabular y graficar el número de partidos que ganó, empató y perdió un determinado equipo de fútbol durante un año determinado. Analizar el gráfico e interpretar la altura que alcanza cada una de las barras. De acuerdo a ese gráfico, ¿cuál era la probabilidad de que el equipo ganara el último partido de la temporada?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Los tres ejemplos se refieren a fenómenos aleatorios: en ninguno de los tres es predecible el resultado. Sin embargo, en los dos primeros, que son del mismo tipo, es claramente observable en el gráfico que la frecuencia asociada a cada resultado es aproximadamente la misma. En el tercer caso, en cambio, las frecuencias correspondientes a los tres valores que puede tomar la variable aleatoria no son las mismas.

Es interesante comentar con los alumnos y alumnas casos con dados “cargados”; en esos casos, algunos resultados no tienen la misma probabilidad de salir en cada lanzamiento.

Si se dispone de un programa computacional apropiado, se puede complementar esta experiencia práctica con simulaciones de experimentos parecidos. La gran ventaja de la herramienta computacional es que los experimentos se pueden repetir una gran cantidad de veces en poco tiempo, y, en muchos de ellos, se pueden visualizar los cambios en las barras de un gráfico.

Considerar otros ejemplos de fenómenos aleatorios: sexo de los hijos, predicciones meteorológicas, nutrición y salud, tabaquismo y enfermedades respiratorias, etc. Es necesario que los alumnos y alumnas asocien el concepto de probabilidad con la frecuencia que se observa en registros estadísticos de los resultados de determinado fenómeno.

Ejemplo D

Hacer una lista de juegos de salón: ludo, dominó, juegos con naipe, con dados, tablero chino, ajedrez u otros, y analizarlos considerando la presencia del factor azar y la de algunas habilidades y estrategias tales como memoria, técnicas de conteo, análisis de opciones, por citar algunas. Comparar con los juegos de azar que se realizan a nivel nacional: lotería, kino, loto, etc.

INDICACIONES AL DOCENTE:
Algunos juegos de salón, como el ajedrez, son juegos de estrategia, otros son una interesante combinación de azar y reflexión, y otros son sólo de azar. En esta conversación se puede establecer la distinción entre la 'buena suerte' y la probabilidad de ganar uno de estos juegos.

Actividad 2

Realizan distintos juegos de azar, determinan las condiciones en que podrían ganar, aplican la definición canónica de probabilidad y la noción de independencia de los eventos.

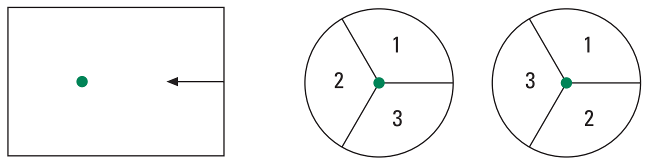
Ejemplo A

Simular la organización de una rifa interna en el curso, suponiendo que eran 20 listas con 15 números cada una y cinco premios a repartir. Organizar un debate suponiendo que en los resultados del sorteo, tres de estos cinco premios recayeron en personas que compraron números en la lista 19. ¿Qué procedimientos de sorteo impedirían que esto sucediera?

INDICACIONES AL DOCENTE:
En este contexto, se puede analizar cómo las características de lo diversos procedimientos de sorteo inciden en la probabilidad de ganar. En cada caso se puede analizar la dependencia o independencia entre los sorteos de cada premio: si se elimina o no la lista que obtuvo un premio en el sorteo siguiente. Si todas las listas y números participaran en los sorteos de todos los premios, una persona podría recibir más de un premio.

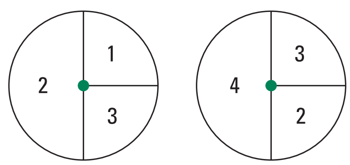
Ejemplo B

Se dispone de discos hechos en cartulina que pueden girar sobre una base que tiene una flecha indicadora.



Si se hacen girar sucesivamente los dos discos del dibujo, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los números indicados por la flecha sea par, considerando que cada disco está dividido en tres ángulos congruentes? Hacer una tabla de valores de los casos posibles y de los que cumplen con las condiciones pedidas.

Este ejemplo admite gran variedad de ajustes y cambios; uno de ellos se ilustra en el dibujo que sigue:



Complementariamente, se podría pedir a los estudiantes que analicen un registro que indica que 70 de un total de 100 juegos realizados con estos discos indican que se obtuvo suma impar.

INDICACIONES AL DOCENTE:

En el primer juego se han puesto los números en distinto orden para establecer que, en este caso, este orden no incide en la probabilidad del resultado.

En relación con el registro que indicaría un 70% de sumas impares es interesante no sólo la conclusión de que la probabilidad de la suma impar es $\frac{4}{9}$, esto es menor que un 50%, sino también la argumentación que los alumnos y alumnas pueden plantear acerca de los defectos en los grados de libertad de giro de los discos u otro que podrían permitir ese resultado.

Ejemplo C

Modificar el ejemplo anterior reemplazando los discos por fichas numeradas disponibles en una bolsa, manteniendo las mismas probabilidades para cada caso, ¿cuáles serían las fichas para los dos primeros discos?, ¿cuántas y cuáles serán las fichas para reemplazar el tercer y cuarto disco?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es interesante notar si los alumnos y alumnas logran diferenciar el número de fichas requeridas en cada uno de los juegos.

Ejemplo D

Se dispone de tres fichas: una es roja por ambos lados, la otra verde, también por ambos lados y la tercera tiene una cara roja y la otra verde. Quien dirige el juego saca de una bolsa una de las tres fichas y muestra sólo una de las caras y pide adivinar el color de la cara que se oculta.

El desafío es encontrar una forma que permita acertar la mayor cantidad de veces el color de la cara que no se muestra, suponiendo que cada vez la ficha es reembolsada.

Analizar situaciones tales como: ¿Qué sucedería, considerando las tres fichas que se pueden sacar, si una persona decidiera que siempre va a decir rojo?, ¿en qué casos acertaría? Si una persona decidiera decir siempre el mismo color que le muestran, o bien, si optara por decir el contrario, ¿cuándo acertaría y cuándo no, en cada caso?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es interesante desarrollar el juego entre pares de alumnos; abrir espacio para la búsqueda y análisis de estrategias posibles, para ponerlas a prueba y llevar registro de los resultados.

Si se considera conveniente, con el propósito de poner más en evidencia los casos posibles y los favorables, se puede ampliar a cuatro fichas, de las cuales una es roja por ambos lados, una es rojo-verde y las otras dos fichas tienen sus dos caras verdes.

Actividad 3

Analizan y resuelven problemas que involucran el cálculo de la probabilidad de un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, utilizando la fórmula de Laplace y distinguiendo los casos de equiprobabilidad, de certeza y de probabilidad cero.

Ejemplo A

Repartir los números del 1 al 12, al interior de grupos de 4 estudiantes, como lo indica el dibujo:

1, 2, 3 | 4, 5, 6 | 7, 8, 9 | 10, 11, 12

Se lanzan dos dados simultáneamente; la suma de los puntos selecciona a la persona que gana ese juego. Cada grupo juega 10 veces el juego. Sintetizar los resultados del curso en un cuadro general como el siguiente:

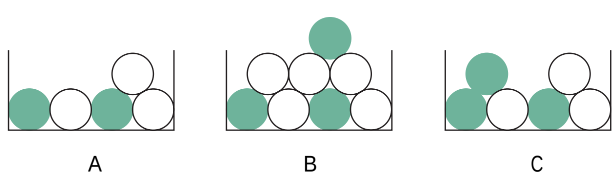
	Juegos ganados					
	Gr A	Gr B	Gr C	Gr D	Gr....	Total
1, 2, 3						
4, 5, 6						
7, 8, 9						
10, 11, 12						
Total	10	10	10	10		

Abrir un debate sobre los resultados en cada grupo y sobre el total del curso. ¿Por qué las personas que tienen los números 1, 2 y 3 ganaron menos veces? ¿Se podría organizar el reparto de los números del 1 al 12 para que las condiciones para ganar sean las mismas para todos los participantes? ¿Reciben todas la misma cantidad de números? ¿Se puede hacer esto para cualquier número de jugadores?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Puede ser adecuado, para el análisis del juego, diferenciar por colores los dos dados para llegar a establecer los 36 pares de puntos posibles que se pueden generar y establecer la probabilidad que corresponde a cada suma del 1 al 12; construir, a partir de esa información, posibles repartos equitativos.

Ejemplo B

¿De cuál de estas cajas es más probable sacar una ficha verde? Fundamentar la opción. Complementar el ejemplo, planteando que se quiere tener la misma probabilidad en las tres cajas: ¿Qué cambios se pueden hacer? ¿Es posible agregar fichas, blancas o verdes, para tener la certeza de sacar una ficha de ese color?

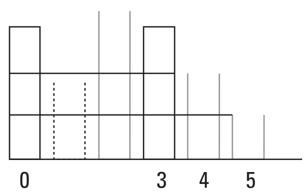


INDICACIONES AL DOCENTE:
Se podrían restringir las reglas del juego, indicando, por ejemplo, que sólo se pueden agregar fichas y no quitar, o que sólo se pueden agregar fichas de un determinado color, etc.

Ejemplo C

Ana María hizo, en el computador, la simulación del siguiente experimento: se lanzan dos dados y se calcula la diferencia entre los puntos; esta experiencia se repitió 1.000 veces. Por un problema con la impresora, ella obtuvo un gráfico borroso como el que muestra el dibujo.

Considerando las características del experimento realizado, completar el gráfico asignando a cada diferencia las barras correspondientes.



Complementar este ejemplo, elaborando el gráfico correspondiente a la probabilidad de cada una de las sumas de los puntos, entre dos dados.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es importante que los alumnos y alumnas experimenten con un par de dados, ojalá de distinto color para determinar todos los casos posibles. Pedir que elaboren una tabla u otra forma de registro; utilizando esa información pueden completar el gráfico.

Considerando los gráficos de las sumas y de las restas, se puede proponer a los estudiantes que inventen juegos que presenten diversas probabilidades para ganar.

Ejemplo D

Averiguar la cantidad de números que se vende en alguno de los juegos de azar públicos (Lotería, Polla) y calcular la probabilidad de ganar el premio mayor.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Para calcular la probabilidad de ganar el premio mayor de alguno de los juegos de azar, es conveniente seleccionar alguno en el que sea sencillo el cálculo del número total de casos. Estos cálculos para el kino o el loto requieren el uso de combinatoria que para este nivel inicial es aún complejo. Pareciera que los casos más simples son el cálculo del premio mayor para la Polla o Lotería, o bien, se podría considerar alguna rifa que se realice en la ciudad o en el propio liceo.

Actividad 4

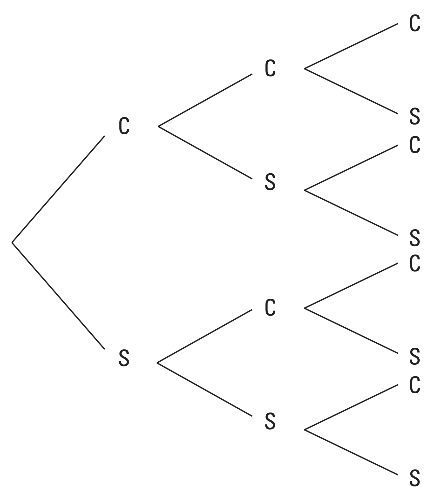
Resuelven problemas que involucran el cálculo de la probabilidad de un suceso asociado a la iteración de un experimento aleatorio sencillo. Utilizan el diagrama de árbol como una técnica de conteo y lo relacionan con el Triángulo de Pascal, para los experimentos con dos sucesos equiprobables.

Ejemplo A

Lanzar una moneda tres veces seguidas, ¿cuál es la probabilidad de que salga dos veces cara y una vez sello? Hacer un diagrama que permita contar los casos posibles y los favorables.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Las situaciones posibles se pueden graficar utilizando el diagrama de árbol. En este caso están marcadas con trazo continuo las soluciones; son tres de un total de ocho.

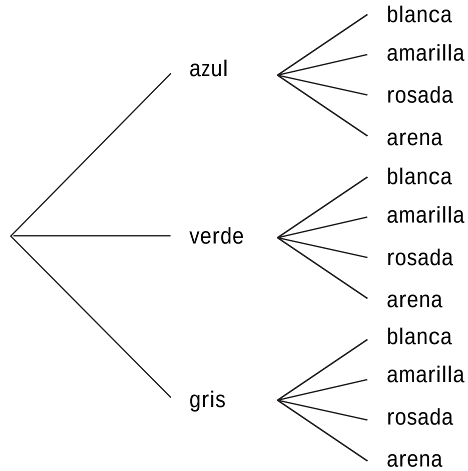


Ejemplo B

En un grupo de 36 participantes, se les da a elegir entre varios colores para el pantalón y la polera necesarios para las actividades deportivas; en los pantalones hay azules, verdes y grises; en las poleras se puede elegir entre blancas, amarillas, rosa o color arena. Si todas la prendas están en una caja, ¿cuál es la probabilidad de que una persona saque la combinación azul-arena? Organizar la información en un diagrama de árbol.

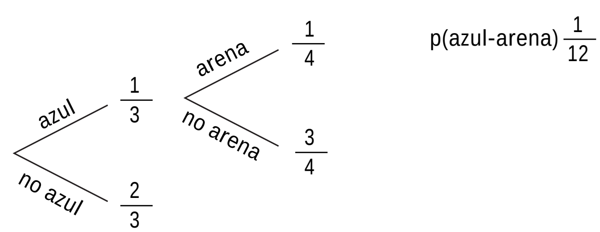
INDICACIONES AL DOCENTE:

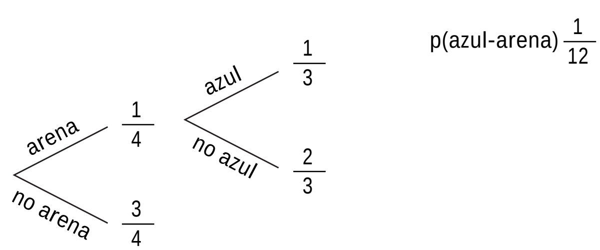
El dibujo siguiente ilustra uno de los posibles diagramas. Es importante que los alumnos y alumnas se den cuenta de que las distintas formas de construir el árbol llevan a un mismo resultado.



En este tipo de situación es importante que los estudiantes organicen la información. El diagrama de árbol es una herramienta clara y cómoda si el número de casos no es muy grande.

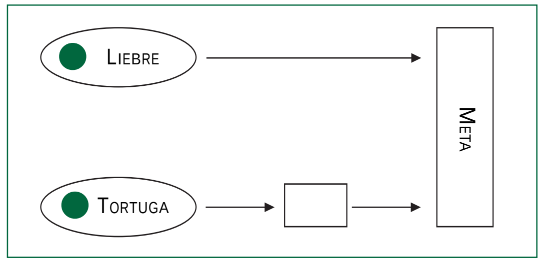
A continuación se incluyen dos diagramas de árbol, equivalentes entre sí, en los que se simplifica el esquema, pero se complejiza su lectura. Puede ser muy interesante comparar los dos tipos de diagrama y relacionar las formas de lectura.





Ejemplo C

Realizar el juego siguiente: en grupos de dos o tres estudiantes, en un tablero como el del dibujo, colocar sendas fichas, una en *Liebre* y la otra en *Tortuga*.

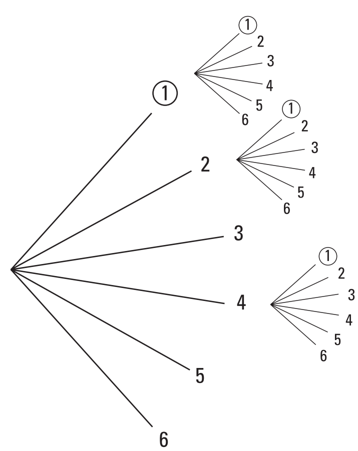


Lanzar el dado; si sale 1, la liebre llega a la casilla *Meta.* Con cualquiera de los otros números, la tortuga avanza un paso.

Si se realiza este juego 20 veces, ¿cuál de los dos animales llega más veces a la meta? Anticipar la respuesta y en seguida desarrollar el juego para analizar con mayor profundidad la situación. Tener un sistema de registro de los resultados, compararlos entre los grupos y graficarlos.

INDICACIONES AL DOCENTE:
Si se dispone de un computador, se pueden llevar los resultados a un gráfico circular, para un total de 20, 100, o más juegos.

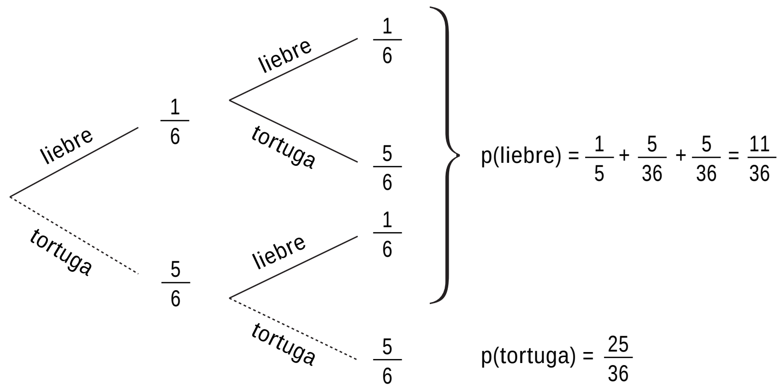
Se puede proponer el análisis de dos lanzamientos del dado para estudiar las condiciones en las que podría ganar la tortuga.



En el diagrama queda explícito que de las 36 duplas que se generan con los dos lanzamientos, 25 hacen ganadora a la tortuga. En consecuencia, la probabilidad de que la tortuga gane un juego es $\frac{25}{36}$. A partir de este resultado, la probabilidad que gane la liebre está dada por:

$$1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

Esta situación también puede representarse en un diagrama como el siguiente, en el que la línea punteada corresponde a la situación en la que gana la tortuga:



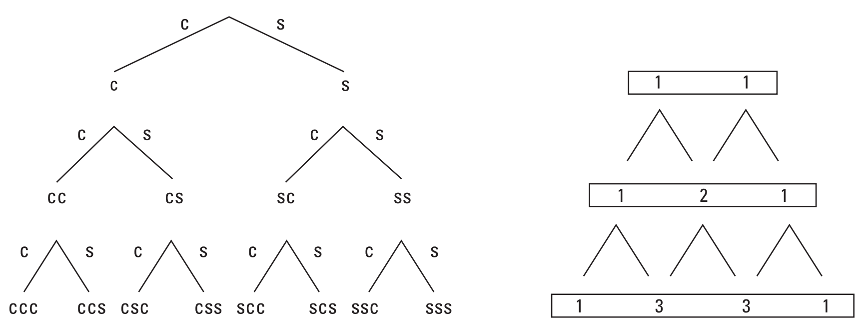
Para enriquecer el juego, se puede modificar agregando otros pasos intermedios para el camino de la tortuga hasta la meta o variando las condiciones para que la liebre llegue la meta.

Ejemplo D

¿Cuál es la probabilidad de obtener sólo caras al cabo de cinco lanzamientos consecutivos de una moneda? Sintetizar los primeros resultados en un diagrama de árbol y generalizar en el Triángulo de Pascal.

INDICACIONES AL DOCENTE:

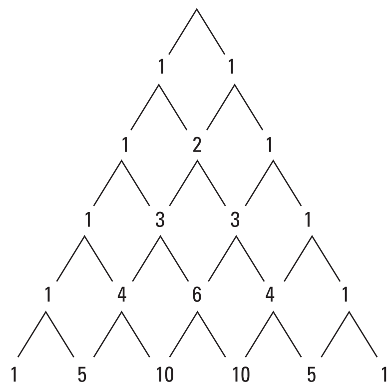
El esquema siguiente resume la relación entre el diagrama de árbol para este ejemplo y el Triángulo de Pascal.



En el tercer lanzamiento la información que se sintetiza en el Triángulo de Pascal es: 1 caso ccc; 3 casos ccs; 3 casos css y 1 caso sss.

Ejemplo E

El Triángulo de Pascal que sigue, sintetiza los resultados obtenidos en el lanzamiento sucesivo de una moneda. ¿Cuántas veces se ha lanzado la moneda? ¿Qué representan cada uno de los números de la última línea del Triángulo de Pascal?



INDICACIONES AL DOCENTE:

Puede ser interesante para los estudiantes recoger antecedentes sobre la historia de este triángulo y analizar las regularidades numéricas que presenta. Además, es conveniente reflexionar sobre la capacidad de síntesis del Triángulo de Pascal.

Es necesario presentar el Triángulo de Pascal en su forma habitual, sin los trazos intermedios:

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Actividad 5

Recogen y sistematizan información acerca del desarrollo histórico del estudio matemático de las probabilidades y sobre su utilización en diversos ámbitos profesionales.

Ejemplo A

Las alumnas y alumnos se informan sobre las probabilidades asociadas a los métodos anticonceptivos, acerca de la probabilidad de generar un cáncer pulmonar por efecto del cigarrillo; en general incluir en estos estudios e investigaciones asuntos de interés para los alumnos y alumnas. Se podría incorporar temas relativos a meteorología, astronomía, género, conquista del espacio, salud, nutrición, niveles de estudio etc. A partir de esta información, podrían hacer breves artículos para publicar en algún boletín del liceo, algunas conferencias sobre algún tema que sea interesante para los padres, una exposición en la que se incluyen dibujos y fotografías, etc.

Ejemplo B

Recoger información sobre Laplace, B. Pascal y P. de Fermat y los inicios del estudio sistemático de las probabilidades.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Interesa que los alumnos y alumnas procesen la información en una perspectiva de aproximarse a la matemática como un área del conocimiento que evoluciona y que busca explicaciones a problemas de diversos ámbitos.

Además, importa que los alumnos y alumnas visualicen que las probabilidades están presentes en el análisis de una variedad de fenómenos y situaciones.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades siguientes son complementarias a las propuestas para el aprendizaje; destacan el aspecto evaluativo presente en el proceso de enseñanza y están ligadas a los aprendizajes esperados señalados en la parte inicial de la unidad, que son los que han orientado el desarrollo de la misma.

Actividad 1

Analizan situaciones y distinguen fenómenos en los que interviene lo aleatorio de los fenómenos determinísticos.

Ejemplo

En la lista siguiente, marcar las situaciones que considere aleatorias y explicar por qué las considera así.

a) Pronóstico del tiempo.

b) Que salga 3 rojo en el juego de la ruleta.

c) Sexo de un recién nacido.

d) Mejoría de un cáncer en tratamiento.

e) Efecto de un remedio en un enfermo con control médico.

f) Chutear una pelota al aire y que retorne al suelo.

g) Apretar el interruptor y que se encienda la luz.

h) Saber lo que otro piensa.

i) Saber cuánto tiempo dedico diariamente al estudio.

j) Tener un accidente en un vehículo que se desplaza a más de 120 km por hora.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Esta actividad se puede desarrollar en una primera instancia en forma individual y después constituir pequeños grupos de dos o tres alumnos y alumnas para volver a discutir el listado. Aquellos puntos en que no haya acuerdo se podrán resolver con la participación de todo el curso.

Interesa observar en el trabajo de grupo y en la discusión final, si es necesario realizarla, cuáles son los argumentos que se esgrimen según el tipo de fenómeno que se trate y si éstos hacen o no referencia a la seguridad o incerteza en la predicción del resultado.

Actividad 2

Realizan distintos juegos de azar, determinan las condiciones en que podrían ganar, aplican la definición canónica de probabilidad y la noción de independencia de los eventos.

Ejemplo A

Analizar las situaciones siguientes, responder las preguntas y fundamentar las respuestas.

a) Si se lanza 6 veces un dado, ¿se puede asegurar que una de esas veces saldrá el número 2?, ¿qué se puede asegurar si se lanzara 500 ó 1.000 veces?

b) Si se lanzó 4 veces un dado y en las cuatro veces salió as, ¿con qué probabilidad se puede asegurar que saldrá distinto en la vez siguiente?

Interesa observar y analizar en cada caso:
i) si se infiere de la fundamentación una noción de probabilidad;
ii) si expresan, de alguna manera, que cada lanzamiento es un experimento independiente del anterior;
iii) la comunicación: su claridad y precisión.

Ejemplo B

Inventar un juego en que la probabilidad de ganar sea mayor que un 60%. Se puede realizar grupalmente y complementar con un trabajo individual en el que cada participante del grupo, responderá algunas preguntas referidas al juego inventado.

Algunas preguntas que se pueden incorporar en esta actividad:

a) Explicar brevemente las reglas del juego creado.

b) Explicar por qué en este juego existe una probabilidad mayor de 60% para ganar.

c) Suponer que Darío juega tres veces y las tres veces pierde; ¿qué explicación se le podría ofrecer a Darío?

Observar si el juego satisface las condiciones pedidas y si la respuesta al punto c) hace referencia a la asociación entre la probabilidad de ganar y el número de veces que se repite el juego.

Ejemplo C

El premio mayor de la Lotería ha tenido terminación 9 durante dos semanas seguidas. Ignacio dice que para aumentar la probabilidad de ganar es preferible jugar a cualquier número que no termine en 9. ¿Es correcta o no la afirmación de Ignacio? ¿Por qué?

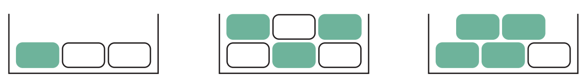
Interesa observar si logran expresar que cada lanzamiento es un experimento independiente; lo que sale en un caso no influye en el resultado del siguiente.

Actividad 3

Analizan y resuelven problemas que involucran el cálculo de la probabilidad de un suceso asociado a un experimento aleatorio sencillo, utilizando la fórmula de Laplace y distinguiendo los casos de equiprobabilidad, de certeza y de probabilidad cero.

Ejemplo A

¿Cuántas fichas blancas es necesario agregar en cada caja, para tener la misma probabilidad de sacar una ficha verde de cualquiera de ellas? Explique, en cada caso, su respuesta.



Interesa observar:

i) si tienen la noción de equiprobabilidad;

ii) el procedimiento utilizado para encontrar la solución (dibujo, cálculo, algún esquema,...);

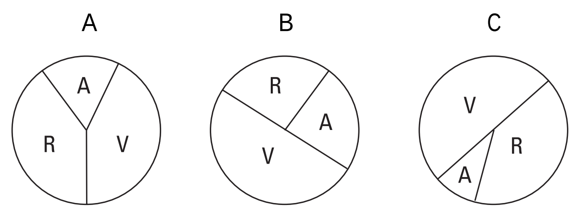
iii) si la explicación es clara y precisa.

Ejemplo B

Al jugar 100 veces con una ruleta se ha registrado la siguiente tabla de resultados:

Color	Nº Veces
Verde	50
Rojo	40
Azul	10

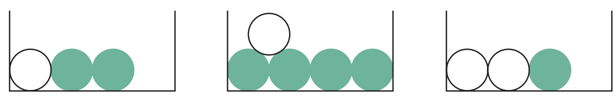
¿Con cuál de las ruletas siguientes se hizo el juego?



Interesa observar cómo relacionan la información de la tabla con la de los discos.

Ejemplo C

Las cinco preguntas que se plantean a continuación se refieren a las tres cajas siguientes que tienen fichas blancas y verdes. En cada caso, explique las razones de sus respuestas.



a) Calcular la probabilidad de sacar una ficha verde de cada caja.

b) ¿De cuál caja es más probable sacar una ficha blanca?

c) ¿Cuántas fichas blancas es necesario agregar en la segunda caja, para que la probabilidad de sacar una ficha verde sea igual en la primera y en la segunda caja?

d) ¿Cuántas fichas verdes es necesario agregar en la tercera caja para que la probabilidad de sacar una ficha verde sea igual en la primera y tercera cajas?

e) Si se agrega una ficha blanca en la primera caja, ¿cuántas fichas blancas es necesario agregar en las otras dos cajas para que sacar una ficha verde en cada una de ellas tenga la misma probabilidad?

Interesa observar:

i) si las respuestas reflejan un manejo de la noción de probabilidad y del uso de la fórmula de Laplace,

ii) si tienen un manejo de comparación de fracciones los alumnos o alumnas que contesten bien a a) y mal a b),

iii) si aceptan que la pregunta e) no tiene solución para la tercera caja.

Actividad 4

Resuelven problemas que involucran el cálculo de la probabilidad de un suceso asociado a la iteración de un experimento aleatorio sencillo. Utilizan el diagrama de árbol como una técnica de conteo y lo relacionan con el Triángulo de Pascal, para los experimentos con dos sucesos equiprobables.

Ejemplo A

Se lanzan 2 monedas simultáneamente, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara en una y sello en la otra? ¿Por qué?

Interesa observar:

i) si distinguen los cuatro casos posibles y los dos favorables;

ii) a qué procedimientos recurren (dibujos, diagramas, cálculo, ...);

iii) si la explicación es clara y hace referencia a la cantidad de casos posibles y de casos favorables.

Ejemplo B

Considere el siguiente Triángulo de Pascal; invente una situación cuya representación corresponda a la de este dibujo. Interpretar, considerando la situación inventada, los números que se anotan en la última línea.

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Interesa observar:

i) si la situación que se propone es coherente con la petición que se hace;

ii) si interpretan el Triángulo de Pascal como síntesis de casos posibles y favorables, para determinados resultados;

iii) si logran relacionar una situación específica con la representación propuesta.

Ejemplo C

Se lanzan tres dados simultáneamente y en los tres sale as. ¿Cuál es la probabilidad que esto ocurra en el lanzamiento siguiente de los tres dados?

Interesa observar:

i) si logran establecer el total de casos posibles;

ii) si calculan correctamente la probabilidad pedida;

iii) qué tipo de procedimiento utilizaron;

iv) las respuestas no esperadas, haciendo alusión a que los dados pudieran estar 'cargados', por ejemplo.

Unidad 2

Semejanza de figuras planas

Contenidos

a. Semejanza de figuras planas.
Criterios de semejanza.
Dibujo a escala en diversos contextos.

b. Teorema de Thales sobre trazos proporcionales.
División interior de un trazo en una razón dada.

c. Distinción entre hipótesis y tesis.
Organización lógica de los argumentos.

d. Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales.
Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones.

e. Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales.
Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos.
Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Conocen los criterios de semejanza de triángulos y los aplican en el análisis de diferentes polígonos y en la resolución de problemas.
2. Reconocen y describen las invariantes que se establecen al ampliar o reducir figuras.
3. Conocen el Teorema de Thales sobre proporcionalidad de trazos y lo aplican en la resolución de problemas.
4. Conjeturan y demuestran propiedades geométricas asociadas a la proporcionalidad de trazos y a la semejanza de figuras planas, distinguiendo entre hipótesis y tesis.
5. Conocen acerca de la mutua influencia entre la geometría y algunas expresiones artísticas.
6. Estiman distancias y longitudes aplicando semejanza de triángulos.

Orientaciones didácticas

La semejanza de figuras es un tema con una amplia y diversa gama de contextualizaciones. Este tema tiene una fuerte tradición en la matemática escolar en nuestro país; generalmente, su enseñanza se ha centrado más en la semejanza de triángulos y en los teoremas que la rigen que en sus aplicaciones.

En el desarrollo de esta unidad se amplía el análisis a la semejanza entre diversos polígonos, enfatizando la incidencia de las regularidades en las condiciones de semejanza y estableciendo relaciones con los conceptos de proporcionalidad y de paralelismo; éstos se sintetizan en los teoremas de semejanza de triángulos y el teorema de Thales, parte del bagaje básico relativo a este tema.

Las figuras semejantes presentan un nivel de evidencia a simple vista; la dificultad reside en el análisis de las condiciones que generan aquello que es visible y tangible; es el salto cualitativo que va desde la superposición de dos triángulos semejantes, constatando la igualdad de los ángulos, a los teoremas de semejanza; es el análisis que permite concluir que todos los polígonos regulares son semejantes entre sí. Es el paso de los ejemplos a la generalización, lo que no es un tema menor para el aprendizaje, y a su vez es uno de los importante aportes que derivan de un aprendizaje de calidad en matemática.

Existen programas computacionales que permiten crear ambientes de evidencias visuales de relaciones geométricas, lo que estimula la formulación de hipótesis.

Numerosos procedimientos para la estimación y el cálculo de distancias y alturas se basan en la semejanza de triángulos. En esta unidad se incluyen algunos de ellos.

Es conveniente que los alumnos y alumnas se acostumbren a seguir el orden de los vértices homólogos, para anotar los nombres de dos figuras semejantes; es una estrategia que facilita la expresión de la proporcionalidad entre los lados.

La semejanza y la proporcionalidad están estrechamente relacionadas. La proporcionalidad es un tema que es motivo de estudio desde la Educación Básica y continúa durante la Educación Media. En su estudio asociado al tema de semejanza es importante que los alumnos y alumnas diferencien las relaciones de proporcionalidad entre longitudes, áreas y volúmenes entre figuras semejantes y puedan establecer una a partir de la otra.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Realizan ampliaciones y reducciones de figuras; utilizan el dibujo a escala e interpretan mapas, planos, dibujos, fotografías u otras formas de representación que utilice el dibujo a escala.

Ejemplo A

Analizar mapas regionales, del país o del mundo estableciendo el significado de la escala; comparar superficies de regiones o de países a partir de un mapa. Recoger información sobre diferentes formas de representar la Tierra y sus consecuencias en la interpretación del tamaño de las diferentes zonas o países. Comparar los efectos de la proyección de G. Mercator (1569) y de A. Peters (1977) en el tamaño de la representación de diferentes regiones.

Ejemplo B

Estudiar planos de maquinarias y estimar el espacio que ocuparía una de esas máquinas en la sala de clase.

Ejemplo C

Analizar maquetas de edificios para aproximar la superficie que ocuparía determinada construcción.

Ejemplo D

Diseñar la distribución de muebles en una pieza utilizando dibujo a escala.

Ejemplo E

Observar dibujos, esquemas y fotografías del macro y del microcosmos; investigar sobre las distancias y dimensiones reales y la dificultad para construir un modelo a escala.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es interesante que los alumnos y alumnas se familiaricen con el fenómeno de la ampliación y la reducción de figuras y cuerpos; que visualicen que se mantiene la forma y que el cambio en las medidas de longitud se rige por una escala, que establece la relación de reducción o ampliación.

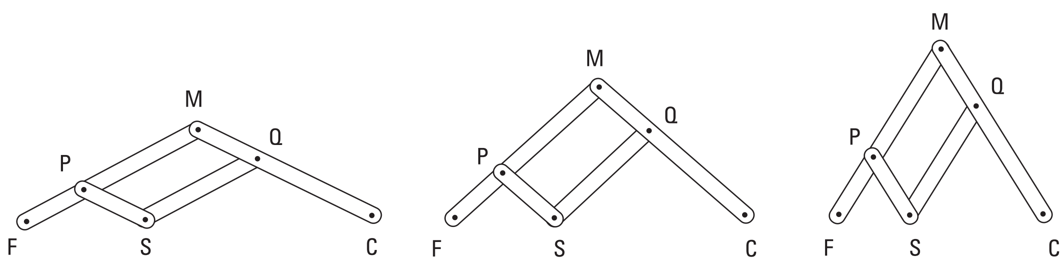
Actividad 2

Construyen figuras semejantes, comparan las medidas de los ángulos y de las longitudes de los lados; construyen tablas y gráficos; establecen las invariantes asociadas a la semejanza de figuras planas.

Ejemplo A

Construir un pantógrafo y utilizarlo para trazar figuras semejantes.

Sugerencias para la construcción de un pantógrafo:



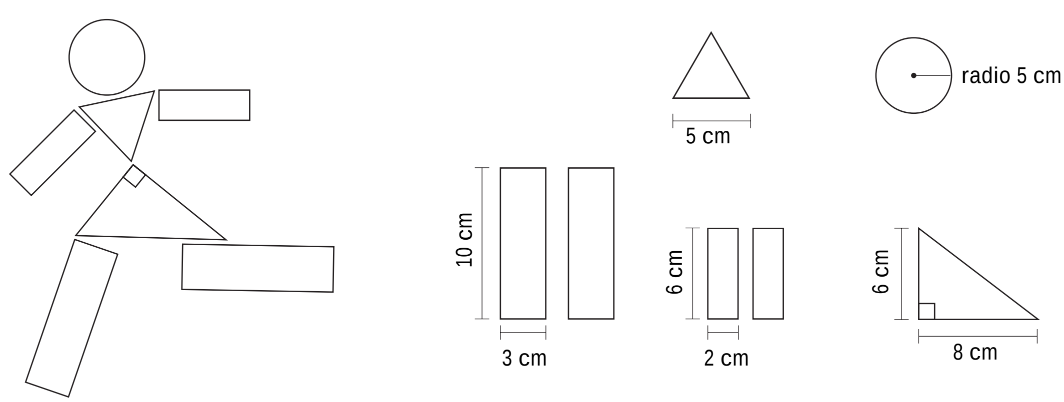
INDICACIONES AL DOCENTE:

Es interesante que los estudiantes conozcan este instrumento, lo utilicen y puedan darse cuenta de su funcionamiento. Para incentivar reflexiones al respecto se puede preguntar: ¿con qué medidas un pantógrafo triplicaría los lados de una figura?

Ejemplo B

Considerar una situación del tipo siguiente. Una empresa ha diseñado un juego para niños que permite armar figuras como la del dibujo.

Las piezas y sus medidas son las siguientes:



- Por diversas razones, la empresa decide agrandar estas piezas con el siguiente criterio: lo que mide 5 cm pasará a medir 8 cm; el resto de las medidas se deben ajustar a ese criterio para mantener la proporción.
- Diseñar en cartulina las piezas del juego ya ampliado. Analizar y comentar los procedimientos utilizados: ¿cuál fue la pieza que ofreció mayor (o menor) dificultad para rehacerla?

INDICACIONES AL DOCENTE:

En este ejemplo, algunos alumnos y alumnas suelen sumar 3 cm a cada medida, probablemente porque es la diferencia entre 8 y 5; si en la actividad se propusiera duplicar la medida: lo que mide 5 cm pasase a medir 10 cm, las alumnas y alumnos aplicarían el modelo multiplicativo; en ese caso el factor de multiplicación es 2.

En este ejemplo, el factor multiplicativo es $\frac{8}{5}$; que este factor no sea un número entero plantea una dificultad mayor que cuando el factor es entero; los alumnos y alumnas aplican, en este caso, erróneamente, el modelo aditivo.

El círculo y el triángulo equilátero debieran ofrecer menos dificultades que las figuras más irregulares. Es interesante considerar que el triángulo rectángulo debe continuar siendo tal y satisfacer, en consecuencia, el Teorema de Pitágoras.

A partir de trabajos de este tipo se pueden inducir “teoremas” de semejanza de las figuras en relación con sus regularidades como, por ejemplo, todos los polígonos regulares del mismo tipo son semejantes.

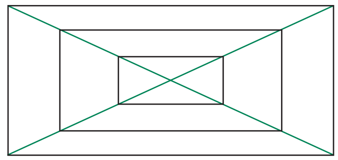
Ejemplo C

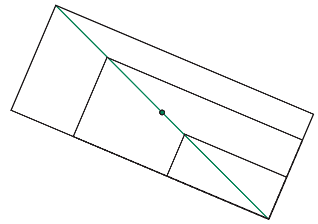
Se organiza al curso en grupos; cada grupo recorta 10 o más rectángulos considerando dos o tres razones diferentes entre sus lados; se pasan estos rectángulos a otro grupo para que los clasifique por semejanza.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Analizar y discutir los procedimientos que presenten los estudiantes. Invitarlos a comparar las medidas de los lados y de las diagonales. Analizar la comparación por diferencia y por cuociente.

Compartir los dos procedimientos que se ilustran en los dibujos siguientes; interesa constatar que los lados de los rectángulos quedan, en este ordenamiento, paralelos entre sí. Es necesario reflexionar con los alumnos y alumnas sobre la relación entre semejanza y proporcionalidad y cómo esta relación se expresa en paralelismo.

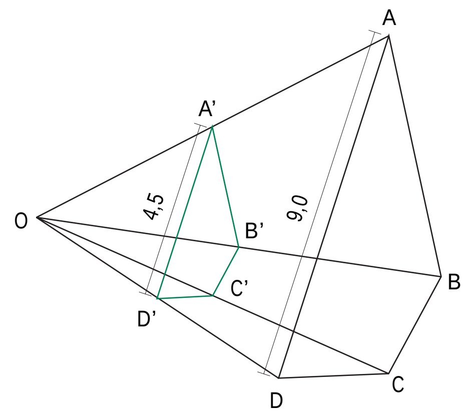


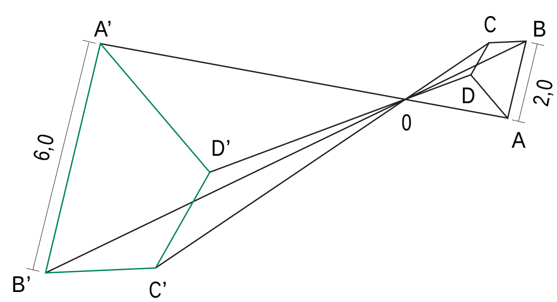


Ejemplo D

Construir por homotecia figuras semejantes. En los dibujos siguientes se proponen dos construcciones. En la primera, O es el centro de homotecia, ABCD es la figura original y la razón de homotecia es $\frac{1}{2}$.

En el segundo dibujo, ABCD es la figura original, O es el centro de homotecia y la razón de homotecia es –3.





INDICACIONES AL DOCENTE:

Es interesante que con regla y compás o con algún programa computacional geométrico, se construyan figuras semejantes utilizando la homotecia. En estas figuras es importante expresar por escrito la semejanza, respetando el orden de los vértices homólogos, y la proporcionalidad entre los lados.

Además, se puede complementar este ejemplo proponiendo el dibujo de dos figuras homotéticas, y pidiendo que determinen los centros y la razón de homotecia.

Actividad 3

Resuelven problemas y elaboran demostraciones utilizando el Teorema de Thales; conocen y analizan una demostración de este teorema.

Ejemplo A

Dividir un trazo en 3 partes de igual medida.

Ejemplo B

Dividir un trazo AB en la razón 2:3

INDICACIONES AL DOCENTE:

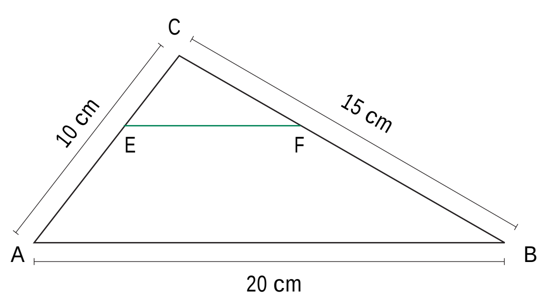
La forma clásica de hacer estas construcciones es por medio de rectas paralelas; es conveniente mostrar en un mismo dibujo, que ni la medida del ángulo que forma la recta auxiliar con el trazo, ni la distancia entre las paralelas alteran la ubicación de los puntos de división. Esto da pie para proponer el Teorema de Thales.

Ejemplos numéricos pueden servir de base para trabajar el teorema de Thales, así como para llegar a la construcción clásica de la división interior de un trazo en la razón m:n en que m y n corresponden a las medidas de dos trazos.

Es necesario que los estudiantes conozcan y puedan entender una demostración del Teorema de Thales.

Ejemplo C

Calcular la medida del trazo EF si E y F dividen respectivamente los lados AC y BC del triángulo ABC, en la razón 2:3 siendo AE más largo que EC.



INDICACIONES AL DOCENTE:

Este ejercicio puede llevar a comentarios relativos a la medida de los trazos que unen los puntos medios de los lados en el triángulo y de los lados no paralelos, en el trapecio.

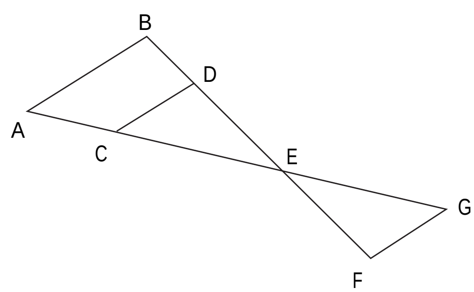
Ejemplo D

Se quiere fijar un cuadro de 80 cm por 60 cm sobre un rectángulo de papel. La persona dueña del cuadro quiere que se mantenga la razón entre las medidas de los lados de la tela. Además, agrega que le gustaría que este marco de color no tuviera más de 5 cm de ancho. ¿Qué soluciones se pueden proponer para las medidas de este marco?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Se puede estimular a que los estudiantes representen a escala el rectángulo con y sin marco; que establezcan las razones entre los lados y las comparen. Observar las respuestas de los alumnos y alumnas, los caminos que toman y que rechazan, las reflexiones que proponen y las conclusiones que plantean para poder apoyar con preguntas sus reflexiones y conclusiones. Analizar las respuestas correctas.

Ejemplo E

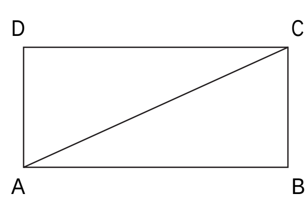
En un dibujo como el siguiente en que AB // CD // FG anotar medidas posibles de los trazos que se generan. ¿A cuáles y a cuántos trazos, como mínimo, es posible asignarles medidas, arbitrariamente, para que la figura quede determinada?



INDICACIONES AL DOCENTE:
Este ejemplo se puede simplificar reduciendo a dos las paralelas y analizando qué medidas quedan determinadas por otras.

Ejemplo F

Si la razón entre la diagonal de un rectángulo y su lado mayor es 5:4, entonces en qué razón están el lado mayor con el lado menor del rectángulo. Explicar el procedimiento realizado.



INDICACIONES AL DOCENTE:
Es muy importante que los alumnos y alumnas escriban las relaciones que van estableciendo y puedan fundamentar con claridad las razones que las sustentan.

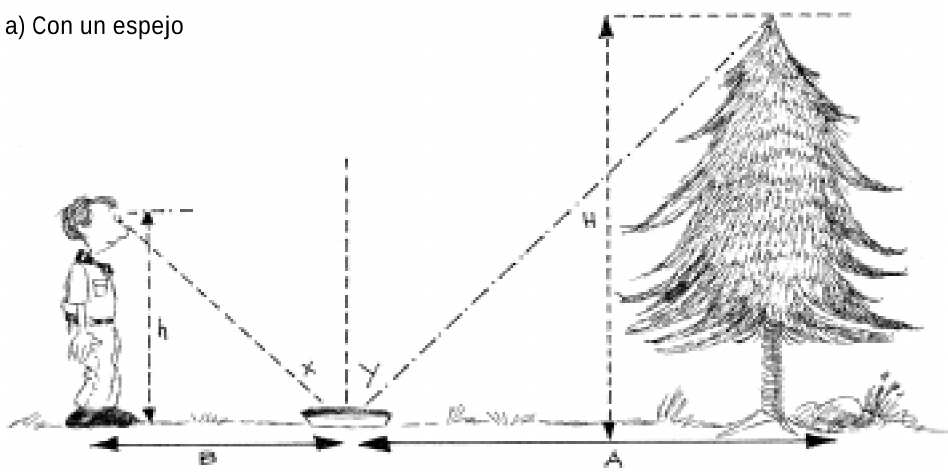
Actividad 4

Estiman distancias o alturas aplicando la semejanza de triángulos; describen las relaciones que justifican la validez de sus estimaciones.

Ejemplo

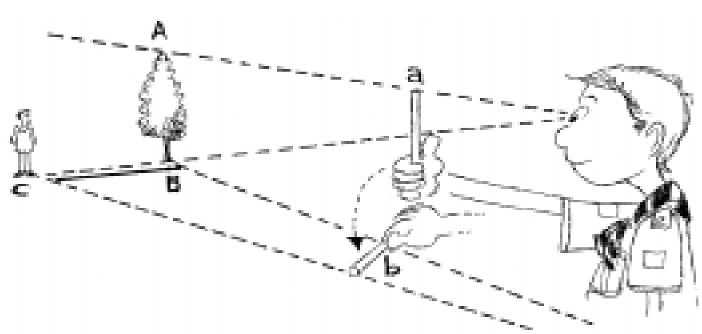
Los dibujos siguientes ilustran diversas maneras, utilizadas habitualmente por las guías y scouts, para estimar alturas y distancias, recurriendo a la semejanza de triángulos. Realizar algunas de estas estimaciones aprovechando alguna salida a terreno que el curso realice u organizando una actividad específica fuera de la sala de clases o del establecimiento educacional.

a) Con un espejo



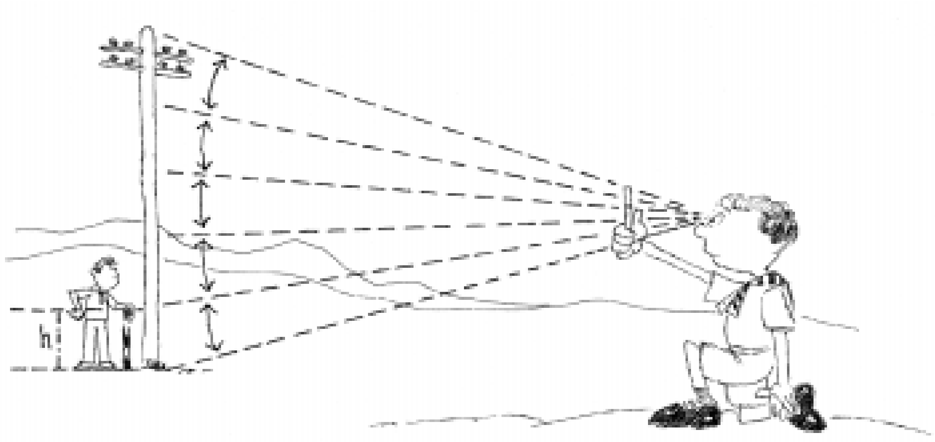
En este caso, es necesario que la persona pueda observar el extremo superior del árbol reflejado en el espejo.

b) La del leñador



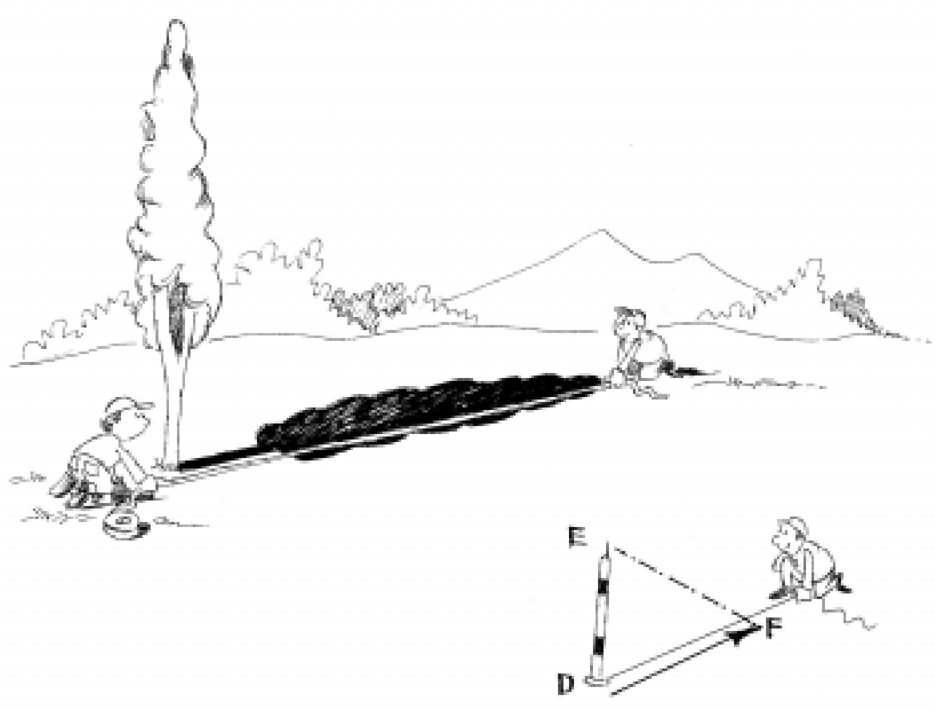
Mirando con un solo ojo, se cubre la altura del árbol con una varita o un lápiz que se sostiene en la mano. Girar la mano en 90º y que una persona se ubique en el punto que corresponde al extremo libre de la varita.

c) ¿Cuántas veces cabe?



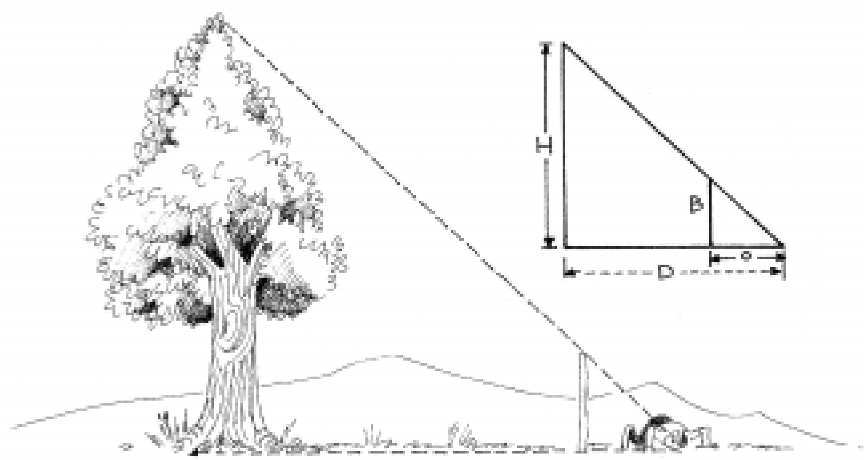
Colocar al pie de un poste una persona o vara de altura conocida. Ubicarse a una distancia adecuada, mirando con un solo ojo y recurriendo a un lápiz o varita que se sostiene con la mano, cubrir la persona y contar cuántas veces cabe en la altura de dicho poste.

d) La de las sombras



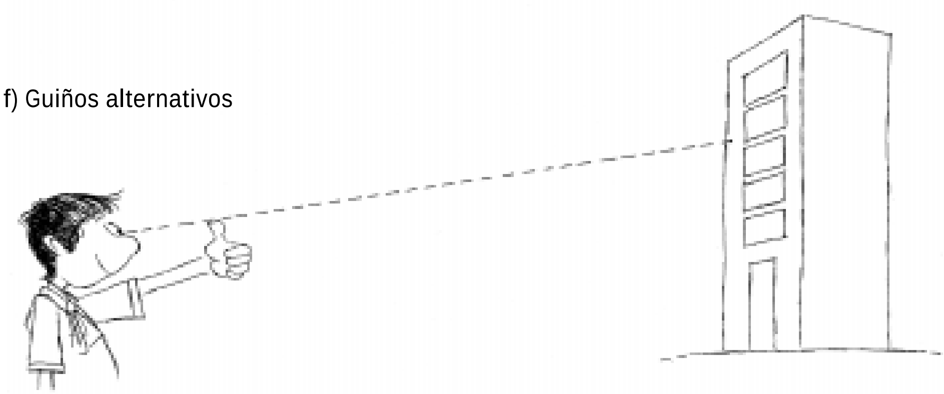
Para una misma hora la razón entre la longitud de un objeto y de su sombra es la misma.

e) Haciendo coincidir los extremos



Es necesario ubicarse a una distancia tal que mirando con un solo ojo queden alineados el extremo superior del árbol y el de la vara de longitud conocida.

f) Guiños alternativos



Con el brazo estirado, utilizar como mira el dedo pulgar para ubicar dos puntos sobre el edificio, mirando primero con un ojo y después con el otro. Estimar la distancia entre ambos puntos, multiplicarla por 10 para obtener una estimación de la distancia que los separa del edificio. El factor 10 deriva de la razón entre la medida aproximada de la distancia entre ambos ojos (6 cm) y la longitud de los brazos (60 cm) un promedio aproximado y cómodo para hacer los cálculos.

INDICACIONES AL DOCENTE:

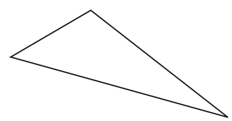
Será interesante que los alumnos y alumnas realicen algunas de estas mediciones estimativas; que se organicen grupos de trabajo para analizar los distintos casos y explicar las razones que justifican estas estimaciones. Es importante que los estudiantes diferencien una estimación de la exactitud, que utilicen las cifras significativas y el redondeo en los cálculos estimativos y que, además, valoren las estimaciones de medidas y resultados.

Actividad 5

Sistematizan los teoremas de semejanza para cualquier triángulo y deducen las formas que estos teoremas toman para los triángulos equiláteros, isósceles y rectángulos. Aplican estos teoremas a la resolución de problemas.

Ejemplo A

Organizar un juego de comunicación, considerando un triángulo escaleno como el siguiente:



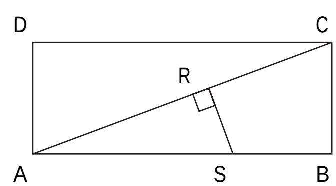
¿Cuál es el mínimo de información que una persona necesita conocer para construir otro triángulo semejante con el del dibujo? Establecen los teoremas de semejanza para cualquier triángulo; particularmente, para aquellos que ofrecen características específicas. Comparan con los teoremas de congruencia de triángulos.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es muy importante que los alumnos y alumnas establezcan la distinción entre la razón de semejanza que se da entre los lados y elementos lineales homólogos entre dos figuras semejantes y que la semejanza conserva la razón entre los lados de una figura. Se puede definir la semejanza como la sucesión de una isometría y una homotecia o viceversa. Además, la congruencia se puede interpretar como una semejanza de razón 1.

Ejemplo B

Considerar el dibujo siguiente:



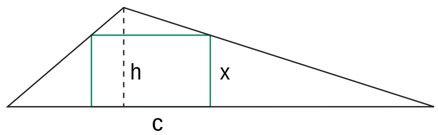
Calcular la medida de RS sabiendo que $\frac{RA}{RC} = \frac{3}{2}$, AR = 30 cm y BC = 25 cm.

INDICACIONES AL DOCENTE:

La resolución de este problema pasa por la aplicación de algún teorema de semejanza de triángulos. Es importante insistir en la escritura de las relaciones y en la verbalización de las razones que fundamentan dichas relaciones.

Ejemplo C

Un rectángulo inscrito en un triángulo tiene su base sobre la base c del triángulo. Escribir la altura x del rectángulo sabiendo que ella es la mitad de la base del rectángulo, en función de la altura h del triángulo y de la base c del triángulo.



INDICACIONES AL DOCENTE:

Es necesario coordinar acciones para que los alumnos y alumnas visualicen los dos triángulos semejantes y escriban ordenadamente las relaciones de proporcionalidad entre los lados.

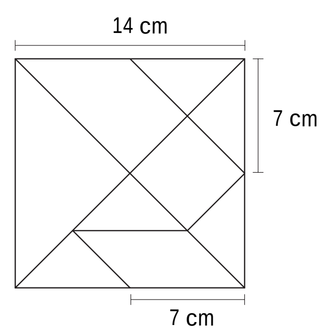
Actividad 6

Analizan figuras semejantes y establecen las razones entre las áreas correspondientes.

Ejemplo A

El dibujo siguiente ilustra un modelo de tangrama. Una empresa decide hacer para la venta una cantidad de estos puzzles de modo que el área total sea el doble del área del cuadrado del modelo.

¿Qué procedimientos podrían utilizar para diseñar el nuevo tangrama? Analizar la razón de semejanza si se duplica el área.



INDICACIONES AL DOCENTE:

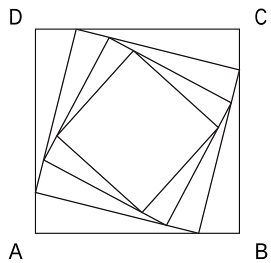
Es posible que la primera reacción de muchos estudiantes sea duplicar los lados del tangrama o de cada una de las figuras. Es importante que pongan a prueba sus procedimientos y constaten si satisfacen o no la petición planteada.

Este ejemplo se puede relacionar con el porcentaje que consideran las personas que sacan fotocopias al recibir la petición que dupliquen un dibujo. Para esos casos se programa la fotocopiadora para una ampliación de 141%. Pedir a los alumnos y alumnas que justifiquen ese porcentaje.

Ejemplo B

En el siguiente dibujo, ABCD es un cuadrado y los vértices de la figura inscrita dividen el lado en la razón 1:4.

Demostrar que las figuras que se generan son cuadrados, y determinar la razón de semejanza entre dos cuadrados consecutivos.



INDICACIONES AL DOCENTE:
Al plantear que se determine la razón de semejanza entre los cuadrados, podría interpretarse entre los lados de los cuadrados o entre sus áreas.

Como problema previo podría proponerse que el punto de división de los lados fuera el punto medio. Construirían así una sucesión de cuadrados de modo que de dos en dos, sus lados están en la razón 1: $\sqrt{2}$ y sus áreas en la razón 1:2

Actividad 7

Recogen información sobre la división áurea, el número de oro, su presencia en la escuela pitagórica, en diversas expresiones artísticas y en la naturaleza.

Ejemplo A

Construir una sucesión como la siguiente:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... en la que cada término es la suma de los dos anteriores, excepto los dos primeros.

Calcular el cuociente entre el término n-simo y el anterior, para diferentes valores de n. Observar el proceso que sufren las cifras decimales del cuociente en la medida que n aumenta.

INDICACIONES AL DOCENTE:
Presentar este número como el número de oro, un número irracional. Dibujar un rectángulo dorado, utilizando las medidas de dos números consecutivos de la sucesión. Profundizar, si se estima conveniente, construyendo la división áurea de un trazo y un pentágono regular.

Ejemplo B

Realizar investigaciones relativas a:

a) la presencia del rectángulo dorado en la pintura, la arquitectura o la escultura. En este ámbito se puede desarrollar alguna actividad compartida con el profesor o profesora de arte;

b) la presencia del número de oro en la naturaleza: la espiral en los caracoles, en las flores de maravilla;

c) la escuela pitagórica, sus símbolos, su historia, su presencia entre los maestros y aprendices de la Edad Media, su influencia en las artes;

d) algunas propiedades del número de oro y su expresión numérica.

Ejemplo C

Desarrollar un panel relativo a la relación entre proporcionalidad y cánones de belleza en diferentes momentos de la historia: los griegos, período del renacimiento, la actualidad. Recoger información sobre los planteamientos de Leonardo Da Vinci y la proporcionalidad en las medidas del cuerpo en el rostro.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Este tema abre un interesante espacio para visualizar en otros ámbitos, a veces no tan próximos a la cotidianeidad, relaciones entre el mundo de la matemática y algunas manifestaciones culturales.

Actividades para la evaluación y ejemplos

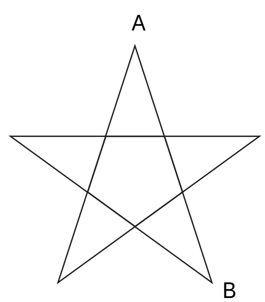
Las actividades siguientes son complementarias a las propuestas para el aprendizaje; destacan el aspecto evaluativo presente en el proceso de enseñanza y están ligadas a los aprendizajes esperados señalados en la parte inicial de la unidad, que son los que han orientado el desarrollo de la misma.

Actividad 1

Construyen figuras semejantes y establecen las invariantes asociadas a la semejanza de figuras planas.

Ejemplo

Se necesita hacer una bandera. Se dispone de una estrella como la del dibujo en la que AB mide 6,8 cm.



Esta estrella es muy pequeña para el cuadrado blanco de la bandera que mide 25 cm por lado. Es necesario agrandarla para disponer de una en que la distancia AB sea igual a 17 cm. ¿Cómo se puede agrandar este modelo? Explique el procedimiento y las razones que lo sustentan.

Interesa observar:

i) qué procedimientos utilizan para agrandar el modelo: pantógrafo al que ajustan las medidas, homotecia de razón 2:5, ensayo y error, u otro;

ii) Si las explicaciones son claras y hacen referencia a que la forma es la misma, pero más grande; o bien, si lo explican haciendo referencia a las medidas de los ángulos y de los lados.

Actividad 2

Resuelven problemas y elaboran demostraciones utilizando el Teorema de Thales o los teoremas de semejanza.

Ejemplo A

Dividir un trazo AB en la razón 3:5:2

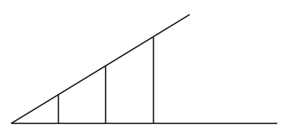
Observar si:

i) lo dividen en 10 partes congruentes o hacen intentos para dividirlo en otro número de partes;

ii) hacen una construcción a partir de 10 trazos congruentes que los utilizan como unidad de medida y sobre ellos establecen la división; en este caso, se podría inferir que no disponen de una herramienta para hacer la división.

Ejemplo B

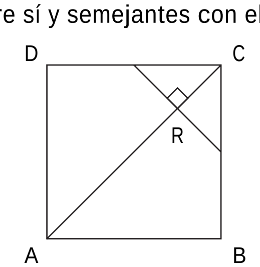
En el dibujo siguiente, las distancias entre los puntos en cada recta son respectivamente iguales. ¿Qué se puede afirmar de las alturas de los trazos? Fundamentar la respuesta.



Observar si los alumnos y alumnas recurren a una notación apropiada y si utilizan el Teorema de Thales o de semejanza de triángulos.

Ejemplo C

ABCD es un cuadrado; R es punto cualquiera de la diagonal; trazar por R una perpendicular a la diagonal. Esta perpendicular intersecta dos lados del cuadrado generando dos triángulos. Demostrar que esos triángulos son congruentes entre sí y semejantes con el triángulo que genera la diagonal con los lados del cuadrado.



Observar si:

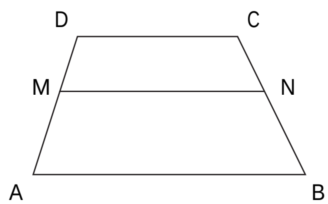
i) distinguen los datos y lo que se quiere demostrar;

ii) visualizan que se trata de triángulos rectángulos;

iii) organizan las afirmaciones para llegar a demostrar lo que se pide.

Ejemplo D

En el trapecio del dibujo, MN es paralela a las bases. Si el punto M divide al lado AD de modo que MD:MA = 1:4, ¿cuánto mide MN si la base menor del trapecio mide 25 cm y la mayor 60 cm?



Interesa observar si:
i) si diferencian los datos de lo que se pide que calculen;
ii) si los procedimientos e intentos de caminos son correctos;
iii) establecen las proporciones conveniente y adecuadamente.

Actividad 3

Aplican los teoremas de semejanza en la elaboración de demostraciones y en la resolución de problemas.

Ejemplo A

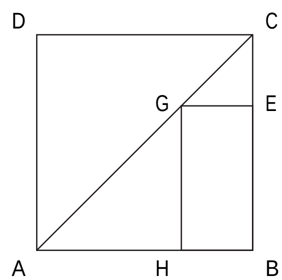
Analizar las situaciones que se describen a continuación y determinar si se trata o no de figuras semejantes.

a) Dos triángulos cualesquiera.
b) Dos triángulos isósceles T y T’ en los que el ángulo del vértice de T y de T’ miden 45º.
c) Dos triángulos rectángulos R y R’ en que un cateto de R es el doble de un cateto de R’.
d) Dos triángulos rectángulos R y R’ en que un ángulo agudo de R es congruente con un ángulo agudo de R’.
e) Dos rectángulos A y B en que un lado de A es la mitad de un lado de B.
f) Dos cuadrados cualesquiera.
g) Dos rectángulos cualesquiera.

Observar si relacionan las propiedades de las figuras con los teoremas de semejanza y con la noción de semejanza.

Ejemplo B

ABCD es un cuadrado de lado a. BEGH es un rectángulo cuyos lados están en la razón 1:3 y tal que G es un punto de la diagonal del cuadrado. Determinar la medida de AG en función de a.



Observar si:

i) distinguen los datos de lo que se quiere demostrar;

ii) visualizan los triángulos isósceles que se han generado;

iii) reconocen la razón de semejanza entre los triángulos rectángulos del dibujo;

iv) relacionan ordenada y claramente la información para plantear sus conclusiones.

Ejemplo C

Dibujar un cuadrilátero cualquiera, determinar los puntos medios, unirlos y demostrar que la figura que se forma es un paralelogramo. Sugerencia: unir los vértices opuestos del cuadrilátero. (Este problema puede proponerse para que se utilice un programa computacional de geometría).

Observar si:

i) relacionan la figura con la semejanza de triángulos o con el Teorema de Thales;

ii) si distinguen entre los datos y lo que quieren demostrar;

iii) si el dibujo los impulsa a plantear conclusiones no razonadas.

Unidad 3

Las fracciones en lenguaje algebraico

Contenidos

a. Expresiones algebraicas fraccionarias simples (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador).
Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.

b. Relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias.

c. Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.

d. Potencias con exponente entero. Multiplicación y división de potencias.
Uso e interpretación de paréntesis.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Expresan en forma algebraica categorías de números enteros y fraccionarios valorando el nivel de generalización que permite el lenguaje algebraico y su poder de síntesis.
2. Explican y expresan algebraicamente relaciones cuantitativas incluidas en problemas y desafíos. Resuelven esos problemas y analizan las soluciones.
3. Aplican sus conocimientos sobre expresiones fraccionarias para el análisis y la resolución de problemas, en especial del ámbito de las ciencias naturales, valorando el aporte generalizador del álgebra.
4. Analizan fórmulas e interpretan las variaciones que se producen por cambios en las variables.
5. Utilizan procedimientos convencionales para el cálculo de multiplicación y división de potencias con exponentes enteros.

Orientaciones didácticas

Esta unidad, como continuación de las unidades relativas a lenguaje algebraico de Primer Año Medio, focaliza el aprendizaje en la relación entre la aritmética y el álgebra, en especial en el ámbito de las fracciones; en el uso y la interpretación de la sintaxis del lenguaje algebraico enfatizando el concepto de potencia con exponente entero y la operatoria con expresiones fraccionarias.

Los alumnos y las alumnas suelen tener dificultades en algunos puntos específicos de este tema, tales como la interpretación de los paréntesis para indicar la base de una potencia, en el caso en que ésta sea un número negativo y el exponente un número par. Es así como los estudiantes suelen confundir notaciones del tipo -2^n con $(-2)^n$ que tienen el mismo valor si n es impar y que toman valores diferentes si n es par. Es importante dejar establecido que escapa a la matemática escolar el estudio de las potencias con base negativa y exponente fraccionario.

Otra dificultad que se presenta habitualmente está asociada a la incidencia en los cambios de signo en el numerador de una fracción que se resta. Hay alumnos y alumnas que eliminan correctamente el paréntesis en expresiones de la forma 5a-(3b+a) en las que el paréntesis ayuda a visualizar la totalidad que se resta y que, sin embargo, no logran transformar correctamente expresiones del tipo $\frac{5a}{b} - \frac{3a+b}{b}$ al expresarlas en una sola fracción.

La simplificación de expresiones fraccionarias presenta también algunas dificultades para su aprendizaje; numerosos estudiantes confunden el modelo aditivo con el multiplicativo; ellos no han logrado diferenciar el significado del producto ab con la suma a + b; esto los lleva a errores del tipo $\frac{a+b}{ab} = 1$ ó 0.

La verbalización del significado de las operaciones en el ámbito de expresiones literales y su relación con la aritmética pueden ser buenos recursos para favorecer una mejor comprensión de las operaciones algebraicas con expresiones fraccionarias.

El desarrollo de esta unidad se orienta no sólo al aprendizaje de un conjunto de procedimientos de operatoria sino que, fundamentalmente, para que las alumnas y alumnos valoren el lenguaje algebraico como una herramienta generalizadora y continúen sus procesos personales de desarrollo del pensamiento matemático, las utilicen para modelar situaciones y recurran a ellas para resolver problemas.

El dominio de estos procedimientos algorítmicos permite establecer una base para continuar el aprendizaje en el campo específico de álgebra y de matemática en general. Lograr este dominio pasa, entre otros, por un proceso de comprensión, de relación con sus conocimientos de aritmética y por una ejercitación calibrada.

Actividades de aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Analizar expresiones algebraicas fraccionarias e interpretarlas como números fraccionarios y viceversa.

Ejemplo A

- Expresar algebraicamente categorías de números como los siguientes:

a) 2, 7, 12, 17, ..., 92, 97, 102, ...,

b) $\frac{2}{3}, \frac{7}{8}, \frac{65}{66}, \frac{34}{35},$

c) $\frac{7}{5}, \frac{6}{4}, \frac{65}{63}, \frac{209}{207},$

- Considerar las expresiones siguientes; calcular qué valores toman para algunos valores de n, con n entero.

a) $2n+1$;

b) $\frac{3n}{2n+1}$;

c) $\frac{n+1}{2n}$;

d) $\frac{2n}{3n+7}$

¿Con cuál o cuáles de estas expresiones se puede representar el número 3? ¿Para qué valores de n?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Ambos tipos de ejemplos se complementan; es importante que los estudiantes se apoyen en sus conocimientos aritméticos para avanzar en el desarrollo de su pensamiento matemático. Es recomendable que el profesor o profesora tenga en consideración algunas observaciones complementarias como las siguientes:

i) constatar, por ejemplo, que expresiones de la forma $\frac{a}{a+1}$ y $\frac{a-1}{a}$ representan el mismo tipo de fracciones y que hay otras múltiples formas algebraicas de representarlas.

ii) que expresiones de la forma $2n + 1$ son siempre números impares.

iii) que en los ejemplos de fracciones del segundo punto, d) puede ser positiva o negativa, no así b) y c) que, si existen, son igual a 0 para un determinado valor de n, o bien, son positivas para cualquier otro valor de n.

Ejemplo B

Señalar el intervalo al que pertenecen fracciones de la forma $\frac{n}{n+1}$, para cualquier valor de n, siendo n un número natural. ¿Entre qué valores se encuentran las fracciones de la forma $\frac{2n}{n+1}$?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es un tipo de ejercicio cuya solución pasa por la construcción de ejemplos numéricos que satisfacen la expresión propuesta y por un análisis que responde a la determinación del mínimo y del máximo valor que ellas pueden tomar.

Ejemplo C

Suponer que se dispone de una calculadora con una tecla especial que calcula el valor de $\frac{x}{(x+1)}$.

Por ejemplo, si se pone 5 en pantalla y se presiona esa tecla, en pantalla se anota $\frac{5}{6}$.

a) ¿Qué número se presiona para obtener $\frac{9}{10}$?

b) ¿Qué se obtiene si se pone 2 en pantalla y se presiona sucesivamente esta tecla especial?, ¿por qué se obtiene ese resultado?

c) Si se pone 1 en pantalla y se presiona sucesivamente 100 veces esa tecla ¿qué número se obtiene finalmente en la pantalla?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es importante asegurarse de que los alumnos y alumnas comprendieron bien el funcionamiento de esta tecla imaginaria. Es conveniente que discutan y comenten los resultados que aparecerían en pantalla considerando las situaciones que se plantean. La generalización que plantea el tercer caso requiere anotar la sucesión de resultados que se va obteniendo, para llegar a inducir la regularidad que presenta la sucesión de resultados y determinar así el resultado después de presionar 100 veces dicha tecla.

Actividad 2

Relacionan la operatoria de números fraccionarios con la operatoria de las expresiones algebraicas fraccionarias; establecen analogías y diferencias.

Ejemplo A

En forma paralela, efectuar sumas o restas de fracciones y la correspondiente suma o resta de expresiones fraccionarias que las representen. Comparar los procedimientos y los resultados.

$\frac{3}{4} + \frac{4}{3} =$	$\frac{n}{(n+1)} + \frac{(n+1)}{n} =$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} =$	$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} =$
$\frac{3}{7} + \frac{3}{4} =$	$\frac{a}{(a+b)} + \frac{a}{(a+1)} =$
$\frac{3}{8} + \frac{5}{-2} =$	$\frac{a}{(a+b)} + \frac{b}{(a-b)} = \frac{a}{(a+b)} - \frac{b}{(b-a)}$

Ejemplo B

En forma similar al ejemplo anterior, considerar cálculos de cuocientes o productos en su forma aritmética y algebraica, comparando los resultados y los procedimientos utilizados.

$1 : \frac{1}{3} =$	$1 : \frac{1}{a} =$
$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} =$	$\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{a^2} =$
$\frac{3}{7} : \frac{4}{49} =$	$\frac{a}{(a+b)} : \frac{b}{(a+b)^2} =$

INDICACIONES AL DOCENTE:

Importa que los alumnos y alumnas visualicen la relación entre ambos tipos de ejercicios: el aritmético y el algebraico; que puedan proponer otros ejemplos a partir de la forma general y constaten que los resultados que se obtengan son particularizaciones del caso general dado por el álgebra.

Actividad 3

Resuelven problemas y demuestran propiedades utilizando la operatoria con expresiones fraccionarias, productos notables y factorizaciones.

Ejemplo A

Un rectángulo se subdivide en 4 rectángulos interiores como lo indica el dibujo; el área de tres de estos rectángulos más pequeños está indicada en cada uno de ellos. ¿Cuál es el área del cuarto rectángulo? ¿Cuál es el perímetro del rectángulo inicial?

Generalizar el problema suponiendo que las áreas conocidas son a, b y c cm^2, ¿cuál es el área del cuarto rectángulo?

7 cm^2	
5 cm^2	3 cm^2

INDICACIONES AL DOCENTE:

En la resolución de problemas, en general, es interesante apoyar a los estudiantes para que aborden el problema, desarrollen sus capacidades para atender las opiniones y aportes de los demás, la flexibilidad para tomar otros caminos y el tesón para continuar con el propio si no le convencen las críticas planteadas; será necesario sugerir oportunamente algunas formas para iniciar caminos para la solución del problema, plantear preguntas, incentivar para que expliquen sus procedimientos y planteen sus dudas.

Ejemplo B

Si a y b son números naturales, completar el siguiente cuadriculado con las expresiones $\frac{1}{a}$ y $\frac{(a+b)}{ab}$ de tal modo que en cada fila y en cada columna aparezca sólo una vez cada expresión.

$\frac{1}{b}$		
	$\frac{1}{b}$	
		$\frac{1}{b}$

¿Qué condiciones deben satisfacer a y b para que el cuadriculado sea un ‘cuadrado mágico’ (que la suma de las líneas, columnas y diagonales sea la misma)?

INDICACIONES AL DOCENTE:

El punto central para determinar las condiciones que se buscan es establecer la relación que refleja la condición de cuadrado mágico: $\frac{3}{b} = \frac{1}{a} + \frac{a+b}{ab} + \frac{1}{b}$. En seguida, es necesario transformarla para llegar a una expresión más sencilla.

En este tipo de situaciones, los alumnos y alumnas suelen presentar reacciones de desconfianza en sus capacidades para resolverlas; es muy importante generar climas y dinámicas de trabajo favorables al desarrollo de actitudes positivas.

Ejemplo C

Demostrar, sin hacer la división numérica entre numerador y denominador, que la igualdad siguiente es correcta.

$$\frac{123\,123\,123\,123}{457\,457\,457\,457} = \frac{123}{457}$$

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es conveniente que las expresiones algebraicas fraccionarias se puedan relacionar con las fracciones numéricas; así adquiere sentido la operatoria básica con fracciones literales que, en caso contrario, pasan a ser un cúmulo de reglas muy fáciles de olvidar. Ese es el sentido de la restricción pedida en cuanto a no resolverlo por la vía numérica.

Si los estudiantes escribieran expresiones de la forma

$123\,123\,123\,123 = 123 \times 10^9 + 123 \times 10^6 + 123 \times 10^3 + 123$ reflejarían conocimiento de la estructura del sistema de numeración y dominio de la operatoria y del uso de potencias de 10. Es posible que sea necesario inducir procedimientos de solución.

Ejemplo D

Demostrar que: $\frac{a+b}{b} - \frac{a-b}{b} = 2\ ;\ b \neq 0$

Ejemplo E

Calcular el valor de: $\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

para los valores permitidos de n ¿cuáles son éstos?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Ambos ejemplos ponen el acento en las dificultades que un alto porcentaje de estudiantes encuentra en relación con la resta de fracciones. Algunos no cometen errores al transformar expresiones del tipo a-(2b + a) pero sí se equivocan en expresiones que incluyen fracciones, como las de los ejemplos.

En el trabajo con expresiones fraccionarias es importante explicitar la restricción en los valores de las expresiones para que el denominador asuma valores distintos de cero. Esta restricción se suele dar por aceptada y pasa a ser un acuerdo no explícito que, en muchas oportunidades, no es claro para los estudiantes.

Actividad 4

En expresiones algebraicas fraccionarias, analizan e interpretan las relaciones entre las variables, sus restricciones y dominios de validez; establecen condiciones considerando la relación de orden y estableciendo generalizaciones.

Ejemplo A

Considerar las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{a}{c}$: ¿qué condiciones cumplen b y c para que $\frac{a}{b} < \frac{a}{c}$. Proponer algunos ejemplos numéricos.

Ejemplo B

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son dos fracciones en que $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, determinar a lo menos dos fracciones que se ubiquen entre ambas. Utilizar la recta numérica y resolver la situación para algunos ejemplos numéricos. Generalizar algún procedimiento.

Ejemplo C

Si en la fracción $\frac{a}{b}$, b se duplica, ¿qué cambio se produce en el valor de la fracción? Ejemplificar con números.

INDICACIONES AL DOCENTE:

En el trabajo con las expresiones literales es conveniente analizar los casos particulares en que las letras se reemplazan por números, sean éstos positivos o negativos; es interesante analizar contra ejemplos para que puedan fundamentar sus conclusiones; que los estudiantes reflexionen en torno a la relación entre lo numérico y lo algebraico; entre lo particular y lo general.

Ejemplo D

¿Para qué valores enteros positivos de n, la fracción $\frac{n+9}{n-3}$ representa un número entero positivo? Elaborar tablas que recojan los resultados que se pueden obtener a partir de distintos valores para n. Analizar situaciones como ¿qué sucede si n es un número positivo menor que 3? ¿Qué valor tomará n para que la fracción tome el valor 3?

Ejemplo E

Si a, b, c, d son dígitos distintos de 0 y distintos entre sí,

a) ¿Qué valores toman a y b para que $\frac{a}{b}$, tome el menor valor posible?

b) ¿Qué valores toman a, b, c, d para que el valor de $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ sea el máximo posible?

c) ¿Qué valores toman a, b, c, d para que $\frac{a}{c} + \frac{b}{d}$ sea igual a 1?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es importante que los alumnos y las alumnas propongan sus opciones y puedan comparar con las que planteen otros, corregir, discutir, constatar, reflexionando acerca de los valores de fracciones con dígitos en el numerador y en el denominador. Son ejercicios que invitan a los estudiantes a conjeturar y buscar formas concretas de comprobar si están o no correctas.

Ejemplo F

Si a y b son enteros y a < b, ordena de menor a mayor las fracciones:

$\frac{a}{b}; \frac{b}{a}; -\frac{a}{b}; -\frac{b}{a}$

Considerar los casos siguientes:

- $0 < a < b$
- $a < b < 0$
- $a < 0 < b$

INDICACIONES AL DOCENTE:
Si se considera necesario, se pueden hacer ejercicios numéricos previos a esta generalización. Es interesante estimular a los estudiantes a utilizar la recta numérica y a observar la simetría entre los inversos aditivos, presente en el ordenamiento de estas fracciones.

Actividad 5

Estudian fórmulas que modelan fenómenos de diversos ámbitos y las utilizan en la resolución de problemas; analizan la pertinencia de las soluciones y las limitaciones del modelo.

Ejemplo A

Las escalas de Celsius y Farenheit para medir la temperatura se relacionan por la fórmula $\frac{C}{100} = \frac{F - 32}{180}$, en que C corresponde a los grados Celsius y F a los grados Farenheit. ¿Existe alguna temperatura en que F y C tomen el mismo valor? ¿Cómo se expresa esta igualdad en la fórmula propuesta?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Puede ser necesario escribir C = F, como una segunda ecuación, para ayudar a tomar un camino de solución del problema. Se podría pedir que algunos alumnos lo hicieran reemplazando F por C en la fórmula y que otros reemplazaran C por F, para comentar las semejanzas y de dónde se derivan éstas. Este es un problema que se puede retomar en el trabajo con sistemas de ecuaciones.

La resolución de problemas que involucre fórmulas, como en este caso, abre un espacio para conversar sobre la relación entre matemática y ciencia; será interesante enfatizar el aspecto predictivo de los modelos, en general; la síntesis que reside en una fórmula y la posibilidad de establecer conclusiones que pueden ser verificables en la práctica.

Ejemplo B

En la formación de una sociedad comercial, los dos socios aportan capital en la razón 2:5; uno de ellos aporta $480.000 más que el otro. ¿A cuánto asciende el capital total de esta sociedad y cuál es el aporte de cada socio?

Generalizar estos procedimientos si los aportes estuvieran en la razón a:b.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Para apoyar el proceso de resolución puede ser conveniente graficar las relaciones para que sea posible visualizarlas.

Al generalizar este problema es conveniente tomar como referencia el ejemplo numérico y acompañar a los estudiantes en la construcción de estos procesos de generalización. Comentar los significados de las expresiones algebraicas y las condiciones de existencia de la solución.

Ejemplo C

Demostrar que en dos triángulos semejantes la razón entre sus perímetros es igual a la razón entre dos lados homólogos. Generalizar a la demostración de una propiedad de las proporciones.

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es conveniente graduar los niveles de generalización para que así los de mayor concreción le den sentido a los más generales. Es muy importante, en este nivel de enseñanza, apoyar a los alumnos y alumnas para que lleguen a tener evidencias de las relaciones entre la aritmética, el álgebra y la geometría.

Ejemplo D

El curso de Andrés quiere juntar dinero para ayudar a su liceo en la compra de computadores. Tienen la idea de hacer un periódico semanal. Averiguaron que si se hacen n periódicos, el costo por cada uno viene dado por la fórmula:

$$C = 2\left(40 + \frac{10.000}{n}\right)$$

¿Cuál es el costo de cada periódico si deciden imprimir 500 ejemplares?

¿Cuántos ejemplares debieran imprimir para que el costo fuera menor que $100?

Si decidieran hacer un tiraje de 500 ejemplares durante 8 semanas, ¿a cuánto debieran vender cada periódico para ganar $360.000?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Siempre es interesante que en el proceso de resolución de problemas se puedan generar momentos para que los estudiantes busquen formas para resolverlos; este problema involucra la interpretación de una fórmula y diversos cálculos si se conoce una u otra de las variables implicadas en ella.

Aunque las inecuaciones y desigualdades no ha sido un tema que se ha trabajado sistemáticamente, es interesante constatar cómo los estudiantes interpretan y responden la pregunta acerca del costo menor que $100.

Actividad 6

Estudian las ecuaciones fraccionarias, analizan las condiciones de existencia de las soluciones y traducen problemas a ecuaciones fraccionarias.

Ejemplo A

Para llenar un estanque, la llave A demora 9 horas, mientras la llave B lo hace en 6 horas. ¿En cuánto tiempo llenan el estanque si ambas llaves están abiertas? Anticipar, en relación con la solución, si será un número entre 9 y 6 o menor que 6.

a) Suponer que una llave lo llena en $\frac{1}{2}$ hora y la otra en $\frac{3}{4}$ de hora. ¿En cuánto tiempo llenan el estanque si ambas llaves están abiertas?

b) Encontrar la expresión que indica el tiempo necesario para llenar el estanque si están dos llaves abiertas y una necesita a horas y la otra b horas para llenarlo. Comprobar la fórmula obtenida con los casos numéricos anteriores.

c) Complejizar el problema incorporando una válvula que vacía el estanque en determinado tiempo.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Interesa que los alumnos y las alumnas logren que las fórmulas y las expresiones algebraicas tengan un nivel de independencia de los contextos numéricos sin perder la relación que los une. De ahí la importancia de un diálogo permanente entre el álgebra y la aritmética en este nivel de enseñanza.

Ejemplo B

Resolver la ecuación: $\frac{x+5}{x-1}=\frac{a}{b}$

Ejemplo C

¿Para qué valores de m, la ecuación m (mx–1) = 2 (2x–3) tiene solución?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Invitar a los estudiantes al análisis de los resultados obtenidos y a expresar las condiciones de existencia de esos valores.

Ejemplo D

En la expresión $\frac{98}{19}=5+\cfrac{1}{x+\cfrac{1}{y}}$, determinar el valor de x e y, sabiendo que ambos son dígitos.

INDICACIONES AL DOCENTE:

El procedimiento más habitual de los estudiantes tenderá a transformar esta ecuación a la forma entera obteniendo 19y - 3xy = 3. Considerando que x e y son dígitos, es interesante invitar a los alumnos y alumnas a encontrar la solución a partir de la factorización de 3 como producto de dos números enteros.

Este ejemplo podría utilizarse para presentar, si ningún alumno o alumna lo hubiera hecho, otro procedimiento. Como $\frac{95}{19}$ es igual 5. La ecuación se puede escribir como $\frac{3}{19} = \frac{1}{x + \frac{1}{y}}$ de donde se obtiene $\frac{3}{19} = \frac{y}{xy+1}$.

Se puede invitar a los estudiantes a inventar ecuaciones de este tipo, teniendo en cuenta que la fracción $\frac{98}{19}$ está formada con los dígitos de 1998.

Actividad 7

Resuelven problemas y ejercicios que incluyen potencias utilizando con propiedad los paréntesis y la expresión $(-1)^n$; multiplican y dividen potencias.

Ejemplo A

a) De las siguientes expresiones determinar aquéllas que tienen un valor constante para cualquier valor de n, siendo n un entero positivo:

$(-1)^n$

$(-1)^{2n}$

$(-1)^{n+1}$

$(-1)^{2n+1}$

b) Calcular el valor de: $(-2)^5 - 2^5$

$(-2)^6 - 2^6$

Generalizar las expresiones: $(-2)^{2n+1} - 2^{2n+1}$

$(-2)^{2n} - 2^{2n}$

c) Determinar los posibles valores para:

$\frac{1+(-1)^n}{2}$

d) Conversar sobre las formas de resolver estos ejercicios. ¿Cómo se interpreta cada uno de ellos? Opinar sobre las diferencias y la interpretación única que tiene la simbología en matemática. Fundamentar cada uno de los procedimientos utilizados.

INDICACIONES AL DOCENTE:

En el trabajo con las potencias, en general, es conveniente analizar los casos numéricos, considerando en la base números enteros, fraccionarios, o decimales, positivos o negativos, pero con exponentes enteros (positivos o negativos), dejando establecido que no se incluyen las potencias con exponentes fraccionarios.

La interpretación y el uso de los paréntesis suele ser una convención poco amigable para los estudiantes. Una convención con una apariencia de nivel elemental suele generar equívocos que a veces se mezclan con el significado de los signos negativos.

Para algunos alumnas y alumnos, verbalizar lo escrito para llegar a su correcta interpretación suele ser un camino adecuado.

Ejemplo B

Simplificar la expresión $\frac{a^{-3}\,b^{-1}}{c^{-2}} \cdot \frac{a^{-4}\,c^{-3}}{b^{-2}}$

y comparar los procedimientos utilizados.

INDICACIONES AL DOCENTE:
Algunos alumnos y alumnas transforman primero a exponente positivo, otros prefieren eliminar la raya de fracción y transforman el denominador a numerador; es interesante conversar sobre la diversidad de procedimientos, compararlos y que elijan el que más les acomode y que puedan utilizar otro si la situación lo amerita.

Ejemplo C

Considere los números de la forma

$2 + 9$; $2^2 + 9$ $\quad (2^2)^2 + 9$ $\quad ((2^2)^2)^2 + 9$ y así sucesivamente. ¿Cuáles de estos números son primos?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Muchas veces, la escritura provoca una imagen de dificultad. Es necesario invitar a abordar y a resolver ejercicios que involucran una reflexión o significan un aporte interesante.

En este caso, los dos primeros, 11 y 13 son números primos. El siguiente es 25 y los que continúan son todos números en que la cifra de la unidad es 5 porque son la suma de 9 más un número que termina en 6.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades siguientes son complementarias a las propuestas para el aprendizaje; destacan el aspecto evaluativo presente en el proceso de enseñanza y están ligadas a los aprendizajes esperados señalados en la parte inicial de la unidad, que son los que han orientado el desarrollo de la misma.

Actividad 1

Interpretan expresiones algebraicas fraccionarias.

Ejemplo

¿De cuántas maneras es posible escribir $\frac{11}{14}$ y $\frac{5}{14}$ en la forma $\frac{a}{b}+\frac{c}{2}$, en que a, b y c representan números enteros? Dar 10 ejemplos en cada caso.

Observar la forma en que buscan la solución:

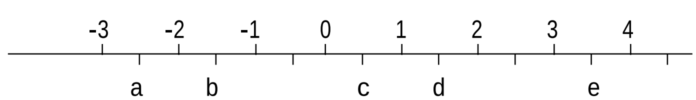
i) si intentan por ensayo y error separando en dos sumandos;
ii) si efectúan la suma y desde el resultado dan valores a: a, b y c;
iii) si se dan cuenta de que hay infinitas soluciones;
iv) si tratan con fracciones equivalentes: $\frac{10}{28}$ *;*
v) si cada búsqueda es independiente o si se apoyan en la primera para resolver la segunda.

Actividad 2

Ordenan, simplifican, calculan sumas, restas, productos o cuocientes de expresiones fraccionarias.

Ejemplo A

Observar en la recta siguiente las ubicaciones relativas de a, b, c, d, e.



Determinar, en consecuencia, si las siguientes expresiones son mayores o menores que cero.

$a - b \qquad ab \qquad \frac{ea}{b} \qquad \frac{c}{ab-a} \qquad \frac{(d+e)}{(c+b)}$

Observar:

i) en cuáles dan la respuesta correcta y en cuáles no;
ii) si tienen dificultad con la división y/o con la multiplicación.

Ejemplo B

Ordenar $\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{a^2}$ considerando **a** entero, **a** decimal o fraccionario. Intercalar entre ambos, para cada caso, un término; ¿se pueden intercalar 3 ó 4 términos?

Observar si:

*i) establecen un análisis diferente para **a** positivo y negativo;*
ii) establecen diferencia para la fracción entre 0 y 1;
*iii) trabajan en forma numérica solamente, dando valores a **a**;*
iv) logran generalizar y establecen fórmulas para intercalar.

Ejemplo C

Considera el siguiente "cuadrado mágico"

$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{b}$
$\frac{1}{c}$	$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a}$
$\frac{1}{b}$	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{c}$

¿Qué relaciones existen entre a, b y c?

¿Cuánto vale b, si a = 4 y c = 12?

¿Cuánto vale a, si b = 3 y c = 3?

¿Cuánto vale a, si b = 8 y c = 12?

Establezca otros valores enteros para a, b y c que satisfagan la relación.

¿Puede hacerse lo mismo si a, b, c son fracciones?

Observar si:

i) utilizan las condiciones de cuadrado mágico para encontrar una relación entre las cantidades;
ii) encuentran la expresión y tienen seguridad en su trabajo;
iii) simplifican la expresión algebraica;
iv) reemplazan los valores y calculan con soltura.

Ejemplo D

a) Determinar el valor de $\frac{(a - b)}{(b - a)}$ si $b \neq a$

b) Determinar el valor de $\frac{a\,(2x - 3y)}{3x - 2y}$

Observar si:

i) visualizan el factor -1;

ii) simplifican sumandos.

Actividad 3

Analizan e interpretan las relaciones entre las variables en fórmulas y expresiones algebraicas.

Ejemplo A

Considerar la fórmula $F \frac{k\,m\,m'}{r^2}$. Si el propósito es que F aumente y k es constante, ¿qué cantidades sería necesario aumentar o disminuir?

Ejemplo B

Considerar $a = \frac{p}{q}$; ¿qué variaciones en p y q permiten duplicar a? Indique tres.

Ejemplo C

En la expresión $\frac{a}{bc}$, los tres valores se duplican ¿qué variación experimenta el valor de la fracción y en cuánto?

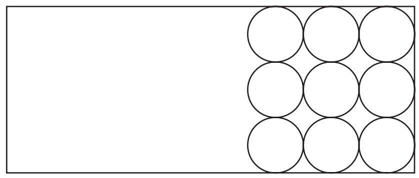
Interesa observar:

i) si tienen las nociones de relación directa y de relación inversa.

ii) si las utilizan en la expresión fraccionaria o si necesitan recurrir a expresiones numéricas para inferir la respuesta.

Ejemplo D

Se quiere cubrir un rectángulo con circunferencias congruentes y tangentes entre sí; el dibujo que sigue ilustra la situación.



a) ¿qué relación debe cumplir el radio en relación con las medidas del rectángulo para que el total de círculo sea mn?

b) ¿cuánto es el área ocupada por los círculos?

c) ¿cuánto es el área libre del rectángulo?

Este puede ser un trabajo que se desarrolla en grupos.

Interesa observar si:
i) utilizan letras para asignar medidas a los lados del rectángulo;
ii) relacionan esos valores con la cantidad de círculos por lado;
iii) conocen y aplican la fórmula para calcular el área de un círculo;
iv) utilizan la operatoria algebraica necesaria.

Actividad 4

Resuelven problemas y ejercicios que incluyen potencias utilizando con propiedad los paréntesis y la expresión $(-1)^n$; multiplican y dividen potencias.

Ejemplo A

Determinar si las siguientes expresiones son positivas o negativas, siendo n un entero.

$(-2)^{2n+1} + (-1)^{2n}$

$-2^n - 2^{n+1}$

Observar si:
i) interpretan bien los paréntesis;
ii) reconocen la notación de un número par y un impar;
iii) tienen dominio en el uso de los signos.

Actividad 5

Resuelven ecuaciones fraccionarias, analizan las condiciones de existencia de las soluciones y traducen problemas a ecuaciones fraccionarias.

Ejemplo A

La solución de una ecuación es $x = \frac{3m}{5b}$. ¿Para qué valores de m ó b esta solución no existe?

Ejemplo B

La solución de una ecuación es $x = \frac{3ab}{a-2b}$. Señalar las condiciones para que esta solución exista.

Observar si:

i) focalizan su análisis en el denominador y saben que el denominador debe ser distinto de cero.

ii) consideran las letras como variables.

Ejemplo C

Analizar el procedimiento de resolución que se propone y señalar si existen errores.

$$x + \frac{1}{x+5} = -5 + \frac{1}{x+5}$$

dándole forma entera, se obtiene x= –5

Observar si:

i) comprueban la ecuación y se dan cuenta de que no es correcta la solución;

ii) resuelven la ecuación y cometen el mismo error;

iii) resuelven y se dan cuenta del error;

iv) se dan cuenta de que hay error pero no lo reconocen.

Unidad 4

Sobre la circunferencia y sus ángulos

Contenidos

a. Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito.

b. Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.

c. Uso de algún programa computacional geométrico que permita en especial visualizar regularidades y medir ángulos.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Conocen el teorema que relaciona las medidas de los ángulos del centro y de los ángulos inscritos en una circunferencia y lo aplican a la resolución de problemas.
2. Conjeturan acerca de regularidades geométricas asociadas a la circunferencia, sus elementos (radio, tangente, cuerda, secante) y otras figuras geométricas; buscan formas para demostrarlas distinguiendo entre hipótesis y tesis.
3. Analizan propiedades y relaciones en figuras geométricas que se pueden inscribir o circunscribir a una circunferencia.
4. Describen cuerpos utilizando curvas de nivel.

Orientaciones didácticas

Considerando que la circunferencia es una figura conocida por los estudiantes, se propone una aproximación desde las curvas de nivel que representan cuerpos redondos, abriendo espacios para que se pueda ampliar el estudio sobre esta forma de representación plana de figuras tridimensionales.

El tema generador de esta unidad es el teorema relativo a la relación entre la medida de un ángulo del centro y la de los ángulos inscritos en la circunferencia, que tengan el mismo arco.

Este teorema se extiende a un análisis de propiedades de los cuadriláteros en relación con la circunferencia. Interesa que los alumnos y alumnas dispongan de formas de pensar que les permitan generalizar, sintetizar información, presentar con claridad los casos que satisfacen determinadas condiciones. La geometría es un terreno propicio para cultivar ese tipo de pensamiento.

En las actividades finales se retoma el tema de la semejanza, estudiado en la segunda unidad, y se relaciona con las propiedades de las secantes a una circunferencia.

Hay una presencia implícita y explícita de conjeturas, de propiedades que es necesario demostrar, de condiciones que deben cumplirse para que determinadas relaciones sean verdaderas.

El trabajo en geometría encuentra en numerosos programas computacionales un excelente aliado, que permite ver los cambios en las figuras, que facilita la intuición y que aporta a la elaboración de cadenas del razonamiento para una demostración.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Imaginan o realizan diversos cortes en cuerpos redondos (cilindro, cono y esfera) estableciendo las condiciones para que estos cortes generen círculos; caracterizan la circunferencia.

Ejemplo A

Imaginar un cono recto en el que se hacen diversos cortes; analizar qué condiciones debe satisfacer un corte para que se genere un círculo. Suponer que un cono se coloca dentro de una caja (ojalá de paredes trasparentes) en la que se va poniendo agua. Graficar la relación entre la altura del nivel del agua y el radio de los círculos correspondientes.

Ejemplo B

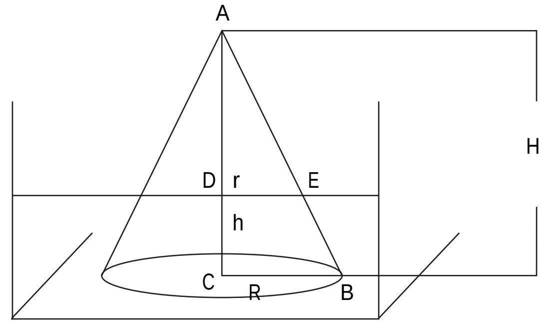
¿Qué formas se obtienen si se hicieran diversos cortes a un cilindro recto?

Suponer, en forma similar al ejemplo anterior, que se coloca este cilindro en una caja que se va llenando con agua: ¿qué forma se genera por la intersección de la superficie del agua con las paredes del cilindro?, ¿cuál es el gráfico que relaciona el nivel de agua con el radio del círculo correspondiente a cada corte?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Si hay dificultades en la visualización, realizar una demostración práctica de los cortes: paralelo, oblicuo o perpendicular a la base del cono y a las bases del cilindro. Podría, si interesa profundizar en el tema, comentar sobre las cónicas o impulsar algún trabajo respecto a ellas. Este ejemplo puede ser retomado para analizar situaciones que se representan por recta en que m es negativo (Unidad 5).

El dibujo siguiente ilustra la situación que se obtiene para el cono.



Se generan dos triángulos semejantes: DEA ~ CBA, de lo que se deduce que

$$r = R - \frac{R}{H}h$$

lo que permite afirmar que el gráfico es una recta.

Para profundizar en el análisis se puede comparar con lo que sucedería con otros cuerpos geométricos. Es importante que los alumnos y alumnas caractericen la circunferencia; que es necesario un punto y una distancia para que quede definida y cómo el compás permite transportar la misma distancia.

Ejemplo C

Hacer cortes imaginarios, en diversos sentidos, en una esfera.

Se pueden utilizar esferas de plumavit. Si se colocan dos alfileres en puntos cualesquiera de la esfera y se unen por medio de un elástico, se marca un arco que es parte de un círculo mayor. Caracterizar el corte que permite obtener el círculo de mayor radio (círculo máximo).

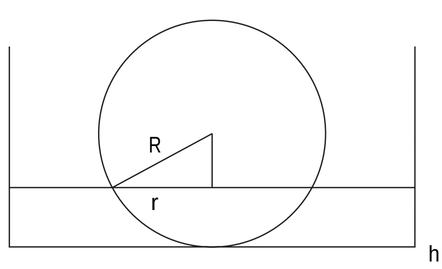
Trazar cortes que generen círculos menores.

Determinar el rango de variación de los radios de los diversos círculos que se pueden obtener.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Realizar una demostración práctica de los cortes, si se estima necesario. Es importante que los estudiantes lleguen a visualizar que todos los cortes que se hagan son círculos; además, que caractericen la relación entre un círculo máximo y el centro de la esfera o un diámetro de ella; que lleguen a establecer que un corte que genere un círculo máximo se puede hacer desde cualquier punto de la esfera. En forma similar al ejemplo anterior se puede colocar una esfera en un tiesto con agua y observar los cortes que se obtienen por la intersección del plano del agua con la esfera. Estudiar la relación entre la altura del nivel del agua y el radio del círculo que se va obteniendo.

El dibujo siguiente ilustra esta situación.



En este ejemplo, $R^2 = r^2 + (R - h)^2$ de lo que se deduce que $r^2 = 2Rh - h^2$. En este caso el gráfico no es una recta.

Ejemplo D

Investigar el sistema de referencia para la superficie terrestre.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Comentar con los estudiantes cómo este sistema de referencia utiliza un diámetro determinado (el eje norte sur), dos círculos mayores (Ecuador y Meridiano de Greenwich) y al grado como unidad de medida de un ángulo cuyo vértice es el centro de la esfera. Para seguir con el análisis, plantear la pregunta: ¿cuál puede ser un sistema de referencia que facilite la comunicación acerca de la ubicación de puntos en una circunferencia?

A partir de lo anterior se pueden desarrollar diversos trabajos acerca de temas como los husos horarios, los viajes y los cambios de hora, el uso de los satélites para indicar la ubicación de objetos y su aplicación a la navegación, etc., en colaboración con el sector de Ciencias Sociales.

Actividad 2

Construyen e interpretan curvas de nivel como representación plana de algunos cuerpos.

Ejemplo A

Trazar, en un mismo dibujo, los círculos que se generan al hacer cortes equidistantes, paralelos a la base de un cono recto. Describir el dibujo e interpretarlo.

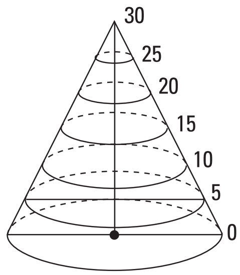
Ejemplo B

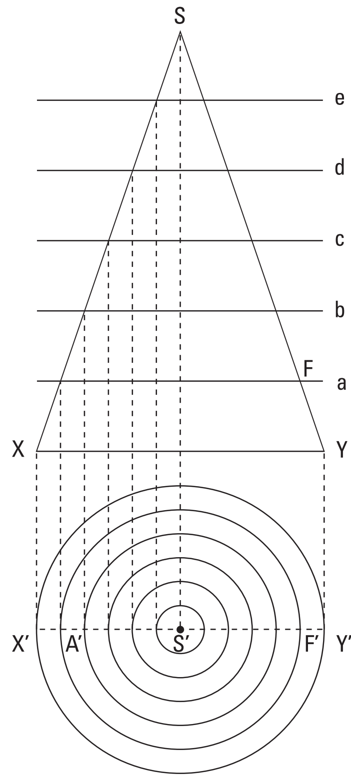
Dibujar las curvas de nivel de una semiesfera, de una pirámide recta de base cuadrada o de otros cuerpos geométricos.

Ejemplo C

Observar e interpretar curvas de nivel en mapas del país. Comparar la altura de dos volcanes de la zona y analizar las curvas de nivel que los representan en un mapa.

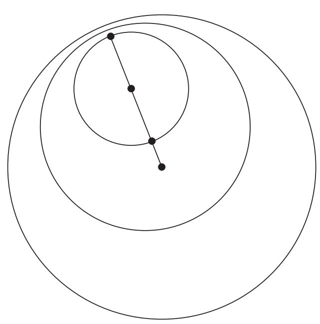
INDICACIONES AL DOCENTE:
La situación se ilustra en el dibujo siguiente.





Es importante que los alumnos puedan comunicar verbalmente el dibujo y que incorporen en su vocabulario palabras como concéntricos y equidistantes.

Puede ser interesante presentar un dibujo como el siguiente y pedir a los alumnos que observen la ubicación de los centros de las circunferencias y determinen las características del cuerpo que representa.



El trazado de curvas de nivel es un recurso de uso habitual en la elaboración de planos y mapas para representar el relieve.

En conjunto con el sector de Ciencias Sociales se puede pedir que interpreten representaciones de alturas y depresiones en mapas de la región o del país, o bien que hagan una maqueta de un cerro a partir de la información de las curvas de nivel que lo representan.

Actividad 3

Demuestran el teorema relativo a los ángulos inscritos y el ángulo del centro que tienen el mismo arco y lo aplican al cálculo de medidas de ángulos o a la elaboración de demostraciones.

Ejemplo A

En una circunferencia, de preferencia con un programa computacional de geometría, dibujan ángulos inscritos y el ángulo del centro, todos con el mismo arco; estudian la relación entre la medida de los ángulos inscritos y los del centro; demuestran el teorema que relaciona la medida de estos ángulos; distinguen la hipótesis y tesis correspondiente; analizan la situación para los ángulos inscritos que miden 90º.

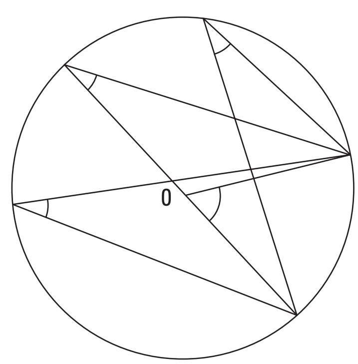
INDICACIONES AL DOCENTE:

La utilización de un programa computacional de geometría posibilita la experimentación para un gran número de casos, lo que permite inducir el teorema en cuestión.

En relación con la demostración del teorema, será interesante plantear que los alumnos y alumnas intenten hacerla, apoyando este proceso con algunas preguntas y sugerencias oportunas.

Ejemplo B

A partir del dibujo que sigue, en que O es el centro de la circunferencia, inventar medidas para los ángulos que están marcados.



INDICACIONES AL DOCENTE:

Interesa que establezcan las medidas de los ángulos de acuerdo a las relaciones entre ellos. Al comparar las medidas propuestas, se podrá analizar si son o no posibles y si están correctamente relacionadas.

Ejemplo C

Si un lado de un triángulo mide 12 cm y el ángulo opuesto a este lado mide 30º, ¿cuál es el diámetro de la circunferencia circunscrita a este triángulo?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es importante que los alumnos y alumnas dibujen un triángulo de acuerdo a la información del problema. Una alternativa para que visualicen la solución es trazar la circunferencia circunscrita para establecer y analizar las relaciones que están presentes en esa figura.

Es posible profundizar en este ejemplo haciendo referencia al arco capaz como aplicación del teorema en estudio.

Ejemplo D

Construir un triángulo rectángulo si se conoce la medida de su hipotenusa y de la altura correspondiente al vértice del ángulo recto.

Establecer las condiciones para que el problema tenga solución.

Comparar los análisis que se planteen y las construcciones que realicen.

INDICACIONES AL DOCENTE:
Se podrían organizar diversos grupos; algunos que consideren medidas en que la altura sea igual a la mitad de la hipotenusa, otros casos en que sea mayor y otros, en que sea menor.

Luego de este análisis en el que intervienen medidas específicas, pedirles generalizar y fundamentar los casos posibles.

Actividad 4

Analizan y establecen las condiciones para que un cuadrilátero se pueda inscribir en una circunferencia.

Ejemplo A

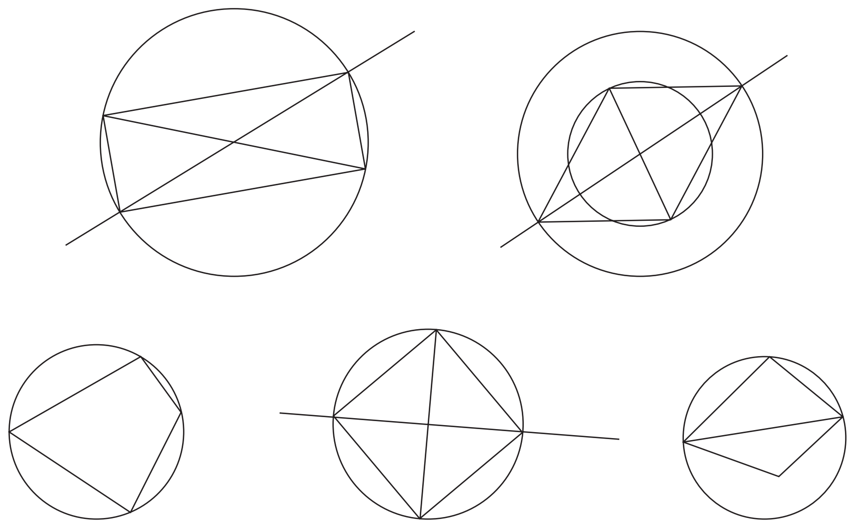
Dibujan circunferencias y le inscriben cuadriláteros; ¿qué cuadriláteros no se pueden inscribir en una circunferencia?, ¿cuáles son las condiciones para que sean inscriptibles?

Analizan si se puede o no trazar una circunferencia que pase por los cuatro vértices de un cuadrado, de un rectángulo y de un rombo. Infieren sobre las propiedades de las diagonales de estos cuadriláteros y los construyen a partir de ellas.

INDICACIONES AL DOCENTE:

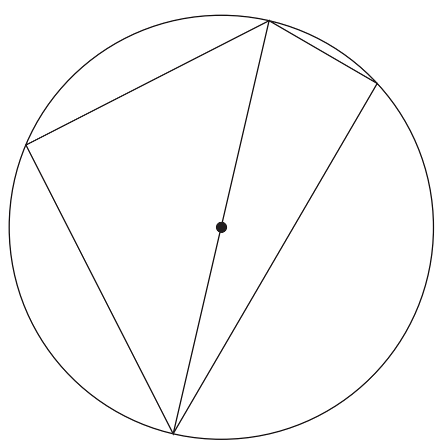
Si se dispone de un programa computacional de geometría, estos problemas pueden resultar de mayor interés para los estudiantes.

Los siguientes dibujos ilustran el análisis para distintos tipos de cuadriláteros.



Ejemplo B

Demostrar que si dos triángulos rectángulos tienen una hipotenusa común, entonces sus vértices pertenecen a una misma circunferencia. ¿Por qué? ¿Se puede trazar una circunferencia por los vértices de cualquier cuadrilátero?



INDICACIONES AL DOCENTE:

Es importante apoyar a las alumnas y alumnos para que lleguen a organizar sus argumentos de modo que puedan demostrar una proposición en forma clara y hagan la distinción entre hipótesis y tesis.

Actividad 5

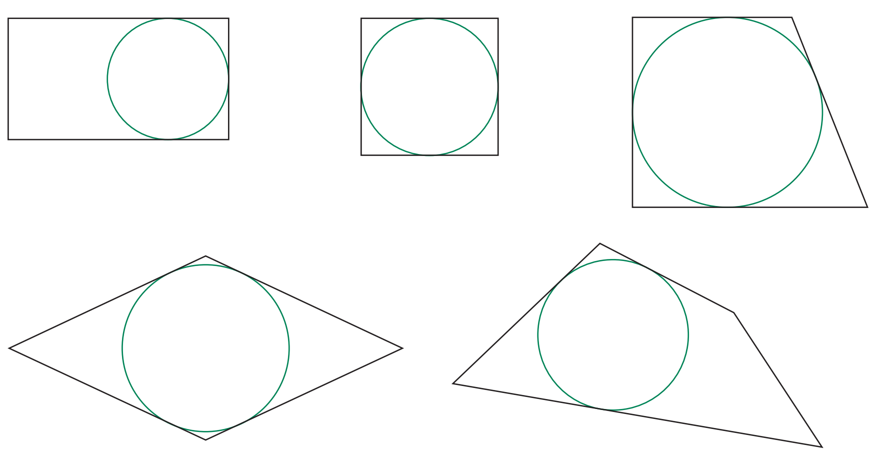
Analizan y establecen las condiciones para que se pueda inscribir una circunferencia en un cuadrilátero. Relacionan esta propiedad con el teorema sobre la medida de las tangentes desde un punto a una circunferencia.

Ejemplo

- Dibujan diversas circunferencias y les circunscriben cuadriláteros convexos. ¿Qué caracteriza a estos cuadriláteros? ¿Qué relación deben tener las medidas de los lados?
- Analizar si se puede inscribir una circunferencia en un cuadrado, en un rectángulo, en un rombo.
- Demostrar que las tangentes a una circunferencia, trazadas desde un mismo punto tienen la misma longitud.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es importante apoyar los procesos de reflexión y análisis de los estudiantes. Es posible que algunos hayan olvidado que la tangente es perpendicular al radio en el punto de tangencia, conocimiento que es necesario para llegar a demostrar el teorema relativo a la medida de las tangentes. El dibujo siguiente ilustra la situación de distintos tipos de cuadriláteros.

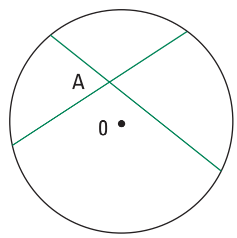


Actividad 6

Demuestran el teorema relativo a la potencia de un punto si éste está en el interior de una circunferencia. Lo aplican en la resolución de problemas.

Ejemplo A

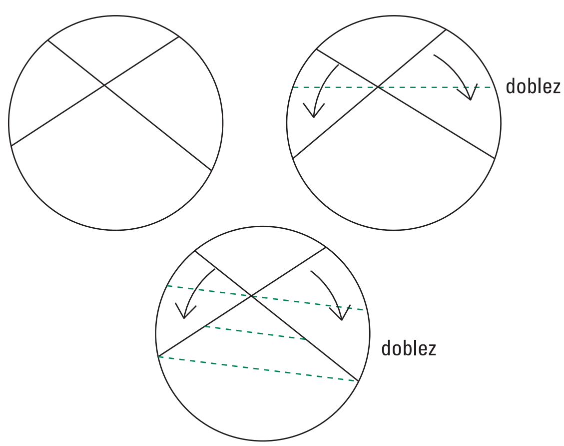
Demostrar que un punto A en el interior de una circunferencia, divide a cualquier cuerda que pasa por A, en dos segmentos tales que el producto de la medida de esos segmentos es constante.



INDICACIONES AL DOCENTE:

Organizar los argumentos y llegar a proponer una demostración es una tarea compleja. Importa apoyar estos procesos en los alumnos y alumnas mostrando, en la medida de lo posible, estas evidencias recurriendo a la manipulación de materiales concretos e invitando a poner en juego la intuición.

Con este propósito se recomienda recortar una circunferencia, ojalá en papel 'diamante' porque son más evidentes los dobleces; en esta circunferencia hacer dos dobleces que representan las cuerdas. Constatar que si se hace un doblez por el punto de intersección de las cuerdas, como lo indica el dibujo, se pueden hacer coincidir los segmentos de cuerda uno sobre otro.



El paralelismo de la líneas punteadas invita a pensar en la semejanza de triángulos y utilizarla para la demostración.

Ejemplo B

AB es una cuerda que mide 15 cm. El punto C la divide en la razón 1: 4. Calcular la medida de la cuerda de la que C es su punto medio.

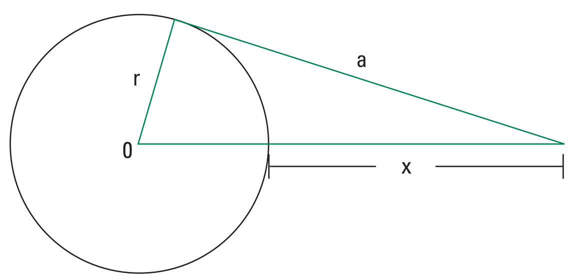
INDICACIONES AL DOCENTE:
Una manera de apoyar a los alumnos y alumnas a resolver este problema es sugerirles que hagan el dibujo suponiendo que la situación propuesta está resuelta. Que a partir de ese supuesto construyan conclusiones.

Actividad 7

Demuestran el teorema relativo a la potencia de un punto si éste está en el exterior de una circunferencia. Lo aplican en la resolución de problemas.

Ejemplo A

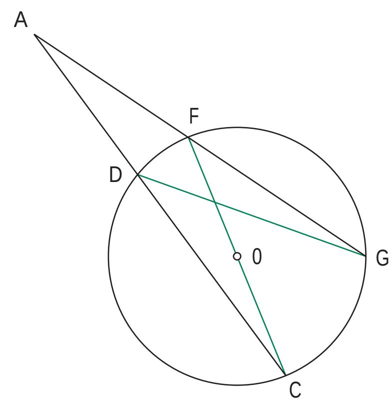
En el dibujo que sigue, en el que O es el centro de la circunferencia demostrar que $a^2 = x(x + 2r)$; reconocer en la figura las variables involucradas.



INDICACIONES AL DOCENTE:
Es necesario que los alumnos y alumnas puedan reconocer que se trata de un triángulo rectángulo. Es conveniente abrir espacio para el intercambio de opiniones, que los estudiantes expresen sus conclusiones y las fundamenten.

Ejemplo B

Demostrar que una circunferencia divide a las secantes trazadas desde un mismo punto en dos segmentos tales, que el producto de la medida de la secante por la del segmento externo a la circunferencia es constante.



INDICACIONES AL DOCENTE:

En este caso es conveniente trazar los trazos que ayudan a “ver” los triángulos semejantes.

Importa que los estudiantes escriban las proporciones que derivan de la semejanza de triángulos para llegar a establecer que los productos son constantes.

Actividades para la evaluación y ejemplos

Las actividades siguientes son complementarias a las propuestas para el aprendizaje; destacan el aspecto evaluativo presente en el proceso de enseñanza y están ligadas a los aprendizajes esperados señalados en la parte inicial de la unidad, que son los que han orientado el desarrollo de la misma.

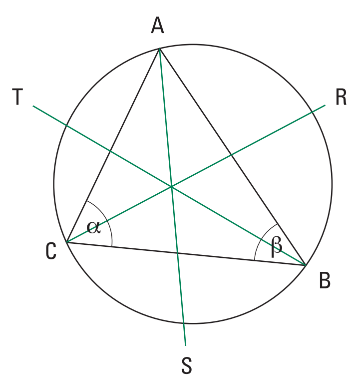
Actividad 1

Aplican el teorema relativo a los ángulos inscritos y el ángulo del centro que tienen el mismo arco, al cálculo de medidas de ángulos o a la elaboración de demostraciones.

Ejemplo A

ABC es un triángulo inscrito en una circunferencia. T,R,S son los puntos de intersección de las bisectrices de los ángulos interiores con la circunferencia.

Determinar la medida del ángulo TSR, si $\alpha = 50º$ y $\beta = 60º$.



Observar si:

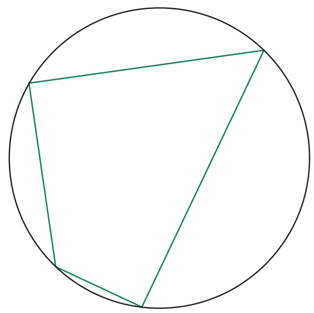
i) comprenden la situación propuesta; identifican la ubicación de las medida;

ii) relacionan la medida pedida con los datos y detectan qué falta;

iii) aplican el teorema de los ángulos en la circunferencia.

Ejemplo B

Analizar el dibujo que sigue: ¿qué conclusiones puede establecer en relación con la medida de los ángulos interiores si uno de ellos mide 55º?



Observar si:
i) marcan uno de los ángulos con esa medida;
ii) calculan la medida del opuesto;
iii) no sacan más conclusiones;
iv) resuelven sobre la suma de los otros dos.

Actividad 2

Caracterizan la circunferencia, plantean y resuelven problemas que involucran elementos secundarios de la misma.

Ejemplo A

Considerar la medida de una cuerda imaginaria que rodea la Tierra por el Ecuador. Suponer que se amplía ese radio en 1 m, ¿cuánta cuerda más se necesita? Si en lugar de rodear la Tierra fuera un círculo mayor de una pelota de fútbol y también se incrementara el radio en 1 m. ¿Será necesario agregar más o menos cuerda que en el caso de la Tierra? Anticipar el resultado antes de hacer los cálculos.

Observar si:
i) anticipan con seguridad que son distintas;
ii) necesitan el radio de la pelota, lo suponen numérico o literal;
iii) se asombran con el resultado.

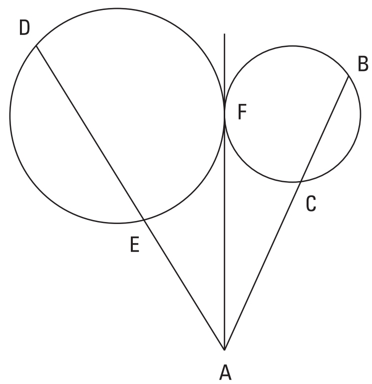
Ejemplo B

Investiga sobre el problema de Anaxágoras (500 AC) acerca de la cuadratura del círculo.

Observar si el tema suscita interés.

Ejemplo C

El dibujo siguiente muestra dos circunferencias tangentes entre sí, dos rectas que parten desde A, secantes a las circunferencias y una tangente a ambas circunferencias que parte desde A. Demostrar que AB · AC = AD · AE



Ejemplo D

¿Cuál es el número mínimo y el número máximo de tangentes comunes que pueden tener dos circunferencias del mismo radio, en un plano?

Observar si ubican las circunferencias en diversas posiciones relativas para analizar todos los casos posibles y si dibujan correctamente las tangentes.

Ejemplo E

Considerar dos circunferencias, la mayor de centro A y radio a; la otra de centro B y radio b; Dibujar el trazo AB.

Determinar la posición relativa de estas circunferencias para que las siguientes relaciones se cumplan.

a) $a - b = |AB|$

b) $a + b = |AB|$

c) $a + b < |AB|$

d) $a - b < |AB|$

Actividad 3

Aplican los teoremas referentes a la potencia de un punto en una circunferencia a la resolución de problemas y elaboración de demostraciones.

Ejemplo A

En una circunferencia de radio 10 cm, se dibuja una cuerda de 10 cm. Si A es un punto que la divide en la razón 1:4,

a) determine la medida de otras dos cuerdas que pasan por A.

b) ¿cuántas cuerdas, además de las anteriores, pasan por A? Determine la medida de dos de ellas.

Observar si:
i) se dan cuenta que necesitan encontrar números cuyo producto sea 16;
ii) si sólo buscan números enteros o si recurren a los decimales y fraccionarios;
iii) si consideran sólo medidas menores que 20.

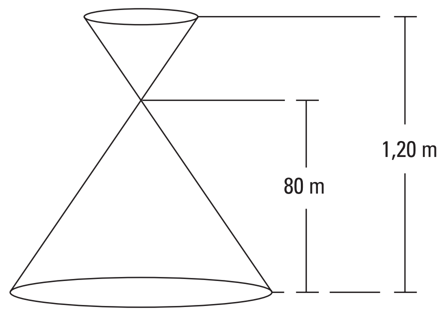
Ejemplo B

Determinar el radio de una circunferencia si la tangente trazada desde un punto P mide 8 cm y la menor distancia desde P a la circunferencia es 4 cm.

Observar si:
i) se dan cuenta de que la menor distancia de P a la circunferencia se mide sobre la secante que pasa por el centro de la misma;
ii) si recurren al Teorema de Pitágoras o el relativo a la potencia de un punto en relación con la circunferencia;
iii) si consideran la medida de la secante como la suma del segmento externo más el diámetro o el radio.

Actividad 4

Interpretar curvas de nivel como representación plana de algunos cuerpos.



Ejemplo

Representar los conos del dibujo por medio de curvas de nivel considerando las dos situaciones siguientes:

a) Alturas que se incrementan regularmente en 10 cm.

b) Alturas que se incrementan en 15 cm.

c) Comparar las curvas que se dibujaron; ¿qué información adicional se requiere para distinguir los dos conos?

Observar:

i) qué diferencias encuentran entre ambas representaciones;

ii) si establecen la necesidad de asociar números a cada curva para indicar la altura del cuerpo.

Unidad 5

Ecuación de la recta y otras funciones, modelos de situaciones diarias

Contenidos

a. Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramo de consumo, por ejemplo de agua, luz, gas.
Variables dependientes e independientes.

b. Función afín y función lineal.

c. Ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y del intercepto con el eje de las ordenadas.
Condición de paralelismo y de perpendicularidad.

d. Función valor absoluto; gráfico de esta función.
Interpretación del valor absoluto como expresión de distancia en la recta real.

e. Función parte entera.

f. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Analizan situaciones y fenómenos que se pueden modelar utilizando las funciones lineal, afín o escalonada; establecen la dependencia entre las variables y la expresan gráfica y algebraicamente.
2. Conocen, interpretan y grafican la función valor absoluto.
3. Conocen la expresión algebraica y gráfica de las funciones lineal y afín; traducen de un registro a otro.
4. Relacionan las funciones escalonadas y valor absoluto con la función parte entera y lineal afín.
5. Identifican e interpretan los parámetros de pendiente e intercepto con el eje de las ordenadas tanto en la forma $y = mx + n$ como en $ax + by + c = 0$ de la ecuación de la recta. Reconocen estos parámetros en las respectivas gráficas.
6. Resuelven problemas que se pueden modelar usando las funciones lineal, afín y/o escalonada.

Orientaciones didácticas

Durante Primer Año Medio, los estudiantes resolvieron y analizaron problemas de proporcionalidad directa que involucraban constantes de proporcionalidad positiva y también valores positivos para las variables x e y. Durante este año, este modelo se extenderá a la función $y = mx + n$.

Para apoyar este proceso será necesario analizar una diversidad de situaciones de variados ámbitos: naturaleza, tecnología, ciencias, gestión, de la vida cotidiana, etc., para construir el modelo y expresarlo por medio de tablas de valores, a través de una expresión algebraica y en forma gráfica, estableciendo las relaciones entre estas formas de representación.

En términos más generales, es interesante que los estudiantes logren tener distinciones entre el modelo y las situaciones que éste permite analizar, sus ajustes y restricciones. Un tema que emerge en este análisis es la aplicabilidad del modelo $y = mx + n$ a situaciones que involucran números enteros en uno de los dos ejes o en ambos. En estos casos es importante explicitar estos ajustes y considerar las adecuaciones en la lectura.

En esta unidad se propone, además, el estudio de otros dos modelos: la función valor absoluto asociada a la distancia entre puntos de la recta real y la función parte entera asociada al análisis de situaciones que se pueden explicar por medio de funciones del tipo escalonadas.

Las tres funciones que se estudian en esta unidad no están precedidas de la definición del concepto de función, que será objeto de estudio en Cuarto Año Medio. El estudio de estos ejemplos pasará a ser el contexto que permita estudiar, en ese momento, el concepto de función.

Existen programas computacionales que facilitan el estudio del comportamiento de estas funciones para un gran número de valores de la variable, para facilitar su interpretación y establecer las relaciones entre los distintos registros: tabla de valores, gráficos y fórmulas.

Será interesante, si las condiciones lo permiten, promover reflexiones orientadas hacia la valoración de la matemática como proveedora de modelos. En este sentido, se podrá impulsar la utilización del modelo para hacer predicciones relativas a la situación que se analiza y a la vez, analizar las ventajas y desventajas de un modelo, en relación a una determinada situación.

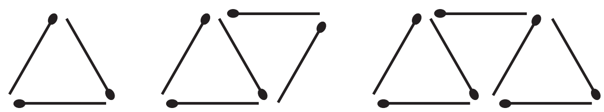
Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Resuelven problemas que se pueden describir por la función y = mx + n; relacionan las variables y representan la recta asociada al problema; interpretan el gráfico, los interceptos con los ejes de coordenadas, los rangos de valores posibles.

Ejemplo A

Con fósforos hacer la secuencia de figuras que se muestra en el dibujo que sigue:

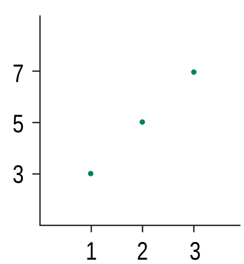


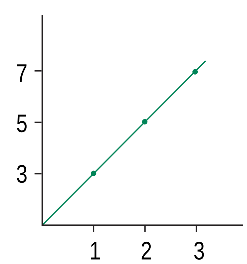
- Expresar gráfica y algebraicamente la relación entre el número de triángulos de cada figura y la cantidad de fósforos necesaria para armarla.
- Construir una tabla de valores, hacer el gráfico y plantear la expresión algebraica de la relación entre las variables: número de triángulos en cada figura de la sucesión y número de fósforos necesarios para construirla.
- En forma similar, puede considerarse sucesiones de cuadriláteros, pentágonos, etc.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Este ejemplo ofrece un nuevo enfoque y una diferente utilización del mismo ejemplo presentado en la Unidad 2 del programa de Primer Año Medio: Lenguaje algebraico.

Al hacer la representación gráfica se puede organizar una discusión entre dos representaciones como las siguientes:





Sería recomendable analizar ambas gráficas para que los estudiantes analicen las diferencias entre la gráfica continua y la discreta; se pueden proponer preguntas como: ¿qué significa el punto de intersección de la recta con el eje y? ¿Qué interpretación corresponde para x = 4 o para y = 4?

Promover una discusión en relación con las variables que están representadas en cada uno de los ejes.

Ejemplo B

En un día con sol, medir las sombras que proyectan varillas de distinta longitud, a una determinada hora del día; organizar los resultados en tablas y en gráficos, establecer la fórmula que relaciona la medida de cada varilla con la de su sombra.

Comparar la medida de las sombras de dos varillas en que una mide el doble de la otra. ¿Qué relación existe entre la medida de las sombras? Una vez establecida la relación s = mv, en que s es la medida de la sombra y v la de la varilla, trazar el gráfico correspondiente.

Trazar la recta s = v en el mismo gráfico: ¿a qué hora del día se obtendría este gráfico, antes o después de la hora en que el curso hizo la medición?

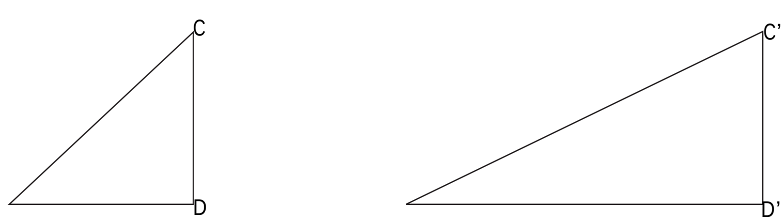
INDICACIONES AL DOCENTE:

Este trabajo se puede realizar colectivamente; los estudiantes se pueden organizar para ordenar los datos en tablas y hacer el gráfico.

Es casi seguro que ninguno de las alumnas o alumnos midió la sombra que proyecta una vara de 5 metros de largo; sin embargo, al disponer del modelo es posible determinar la medida de la sombra que corresponde a esa longitud, en el momento en el que se hizo la medición. Al tenor de estas reflexiones, puede ser oportuno conversar con los estudiantes sobre el valor predictivo de los modelos matemáticos.

Ejemplo C

Investigar sobre las cuestas en los caminos de la región y comparar las pendientes. Considerar el dibujo que sigue. ¿Cuál representa la cuesta con mayor pendiente suponiendo que CD = C'D'?



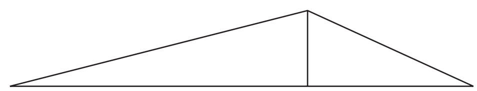
Completar tablas de valores que indiquen medidas de alturas y de distancias horizontales, que correspondan a cuestas de la misma pendiente.

Graficar la relación entre las medidas; relacionar con la proporcionalidad directa ya estudiada en Primer Año Medio.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es necesario que los estudiantes logren conceptualizar pendiente como el cuociente entre la altura y la distancia horizontalmente recorrida.

Otra situación que también puede ayudar a conceptualizar pendiente es la inclinación de los techos de las casas; averiguar en el ámbito de la construcción las condiciones que debe satisfacer la inclinación de los techos de las casas en las diversas zonas del país considerando el régimen de lluvia o de nieve. Reconocer y eventualmente calcular la pendiente en un corte de un techo de dos aguas, como el del dibujo.



Ejemplo D

Expresar algebraica y gráficamente la relación entre dos números si uno es:

- el triple de otro
- el doble de otro
- la mitad de otro
- 0,75 veces el otro
- -2,5 veces el otro
- $\sqrt{2}$ veces el otro

INDICACIONES AL DOCENTE:

En la construcción y lectura del gráfico es necesario estar atento a las distinciones entre enteros, fracciones y decimales. Para la realización de estas actividades se puede recurrir al uso de una planilla de cálculo y/o de un programa computacional gráfico. Será interesante que los estudiantes puedan, en algún momento, hacer las gráficas de distintas relaciones afines o lineales, en un mismo sistema de coordenadas, para que comparen las pendientes y concluyan. En ese caso, sería importante incorporar y = x.

Ejemplo E

En una cuenta del agua potable se consigna un cargo fijo de $1.061. Sabiendo que el modelo de cálculo de tarifas es un modelo lineal y que por un consumo de 14 m^3 se facturó en el mes de octubre $6.021, ¿a cuánto se facturó en diciembre si en ese mes el consumo ascendió a 28 m^3?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Importa que los alumnos y alumnas relacionen sus conocimientos matemáticos con situaciones próximas a sus experiencias.

En el trabajo con las funciones lineal y afín o con las de tipo escalonada, se puede estudiar la relación entre los consumos de luz, agua, gas de cañería, teléfono fijo y el monto de las cuentas. En general, estas tarifas que se establecen por ley, fijan valores por tramos de consumo y un cargo fijo mensual.

Es importante que los estudiantes se habitúen a realizar la reflexión desde la situación real al modelo, para volver desde las conclusiones o predicciones que éste permite a la situación real nuevamente.

Ejemplo F

Suponer que dispone de una caja en forma de paralelepípedo recto, a la que se le pone cierta cantidad de agua. Expresar el volumen del agua en términos del área basal de la caja y la altura que alcanza el agua. Trazar e interpretar el gráfico respectivo. ¿Cuáles son las variables que se consideran en ambos ejes?

¿Qué condiciones debe satisfacer un paralelepípedo recto para que su volumen sea igual al cuádruple de su altura?

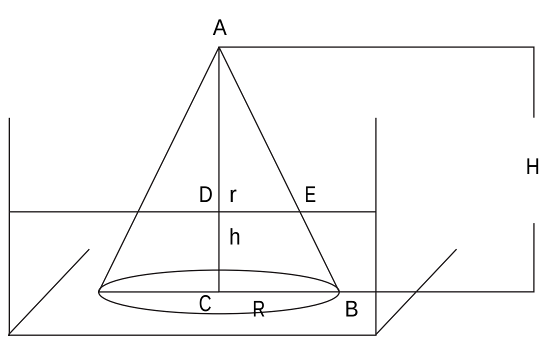
INDICACIONES AL DOCENTE:

En este ejemplo se considera la fórmula para el volumen de un paralelepípedo, V = abc, desde una perspectiva más dinámica. Es importante que las alumnas y alumnos establezcan la relación entre la pendiente m de la recta y el área de la base de la caja. En forma similar, se puede efectuar el análisis de situaciones que incorporen fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes de distintas figuras y cuerpos, manteniendo una variable en primer grado como independiente y las otras como constante.

Ejemplo G

En la tercera unidad relativa a la circunferencia, en la actividad 1, se propone un ejemplo en el que se pide analizar la relación que se establece en un cono recto, entre el radio del círculo que se obtiene por un corte paralelo a la base y la distancia entre este corte y la base.

El dibujo que sigue representa la situación analizada.



Analizar la situación y establecer la relación entre las variables y expresarla bajo la forma $y = mx + n$

INDICACIONES AL DOCENTE:

Invitar a los estudiantes a hacer la distinción entre las cantidades que varían y aquéllas que permanecen fijas.

Interesa que los alumnos y alumnas lleguen a expresar el radio del círculo de corte en función de la altura del nivel de agua.

Si r es el radio del círculo que se obtiene en el corte y h la distancia entre el corte y la base del cono, la expresión $r = \frac{R}{H}h + R$ indica las variaciones del radio de ese círculo en función de h; R y H son constantes, representan el radio de la base del cono y la altura del mismo; en consecuencia

$$m = -\frac{R}{H}$$

Este es un ejemplo de una situación que se puede estudiar por una función afín en que m es negativo.

Actividad 2

Estudian y grafican diversas expresiones de la forma y = mx + n; consideran valores para m que sean enteros, fraccionarios y decimales; mayores y menores que cero; analizan casos con n = 0 y con n ‡ 0; establecen las relaciones específicas que condicionan el paralelismo, la perpendicularidad, las rectas paralelas a los ejes, la recta que pasa por el origen y los puntos de intersección de la recta con los ejes.

Ejemplo A

Hacer la tabla de valores, graficar y analizar la relación entre las expresiones algebraicas y gráficas de diversas rectas. Descubrir y expresar las condiciones relativas al paralelismo, perpendicularidad e intersecciones con los ejes.

- Graficar en un mismo sistema de coordenadas,

  $y = x + 4$, $y = 2x + 4$, $y = -x + 4$, $y = -2x + 4$

- Graficar en un mismo sistema de coordenadas,

  $y = -3{,}5$ $x = 1$ $x = -5{,}5$

- Graficar en un mismo sistema de coordenadas,

  $x + 2y = 6$ $y = \frac{-x}{2}$ $2x + 4y = -5$ $x + 2y = 2$

- Graficar en un mismo sistema de coordenadas,

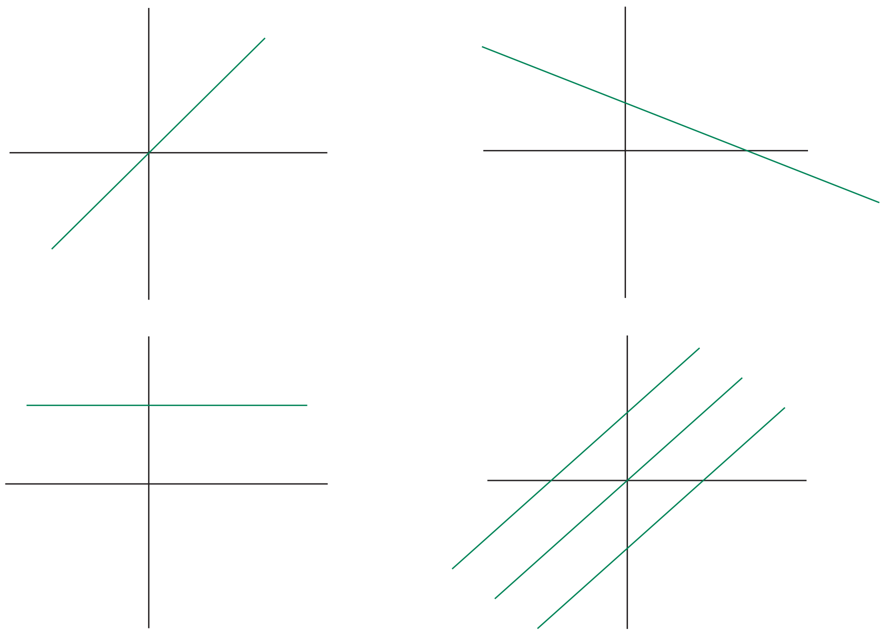
  $y = -3x + 2$ $y = \frac{x}{3} - 5$ $3x + y = 0$ $x - 3y = 4$

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es interesante desarrollar estos ejemplos con el apoyo de un programa computacional adecuado y apoyar la comprensión del significado gráfico de los parámetros.

Ejemplo B

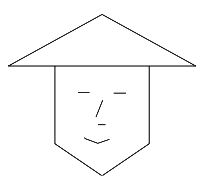
Considerar diversos gráficos y caracterizar los valores para m y n.



INDICACIONES AL DOCENTE:
En forma similar al ejemplo anterior, los alumnos y alumnas pueden caracterizar la expresión algebraica asociada a las gráficas dibujadas. Así como está planteado, el ejemplo tiene un carácter bastante general; éste se podría especificar graduando los ejes.

Ejemplo C

Establecer una ubicación para el sistema de coordenadas y escribir las ecuaciones de las rectas y el correspondiente intervalo para x, que determinan una máscara como la del dibujo:



INDICACIONES AL DOCENTE:
Este puede ser un entretenido trabajo para los estudiantes; se puede diversificar pidiendo que escriban mensajes en ecuaciones e intervalos para x, de modo que la interpretación sea algún dibujo con trazos rectos.

Actividad 3

Resuelven diversos problemas que involucran la ecuación de una recta recurriendo principalmente a la representación gráfica.

Ejemplo A

Determinar el punto de intersección de las rectas $x = -3$; $y = 7,2$

Ejemplo B

Calcular la distancia desde el punto (3, 0) a la recta $y = 6$.

Ejemplo C

Sea ABC un triángulo rectángulo en A cuyas coordenadas son (4,4). Si una de las rectas portadora de uno de los catetos es $y = x$, ¿cuál es la ecuación de la recta portadora del otro cateto?

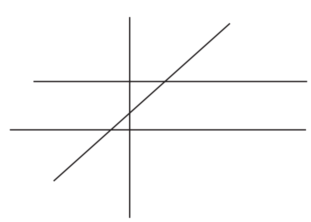
Ejemplo D

Escribir la ecuación de una recta que pasa por el punto (3, –5)

INDICACIONES AL DOCENTE:
En la resolución de este tipo de problemas es interesante sugerir que los estudiantes los grafiquen. A partir del gráfico se hace evidente que no se necesitan complejos cálculos para establecer la respuesta.

Ejemplo E

Encontrar la ecuación de las rectas que permitan formar un paralelogramo cualquiera o un triángulo en el gráfico que sigue, en el que las ecuaciones de la rectas son $y = 3$; $y = x + 1$



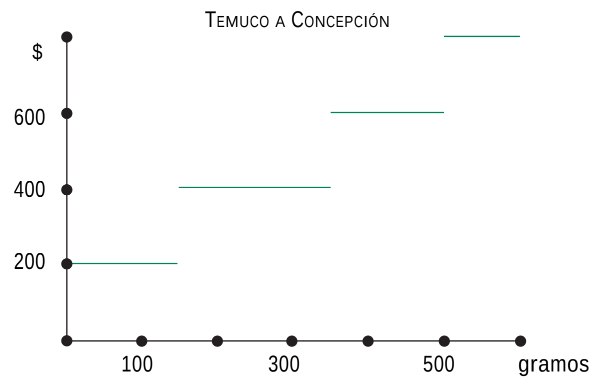
INDICACIONES AL DOCENTE:
Como las soluciones serán diversas, será interesante establecer qué es lo común que tienen las ecuaciones propuestas que les permite ser solución del problema planteado.

Actividad 4

Analizan y grafican situaciones que se pueden estudiar recurriendo a funciones escalonadas, lineales o afines.

Ejemplo A

El señor que atiende la recepción de encomiendas dispone de gráficos como el siguiente:



¿Cuál es el precio de una encomienda que se envía de Temuco a Concepción y que pesa 410 gramos?

INDICACIONES AL DOCENTE:

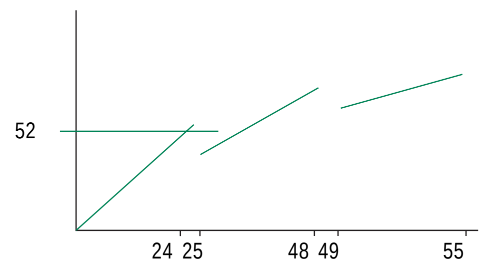
Es interesante que los estudiantes analicen algunas situaciones de la realidad a la luz de modelos matemáticos; que puedan predecir valores y establecer diversas conclusiones. Las tarifas de diversos productos de consumo doméstico (gas, electricidad, agua) se establecen por tramos, considerando un cargo fijo mensual.

Ejemplo B

Una editorial decide que los precios para atender los pedidos de su último libro se ajustarán a las condiciones que se indican. Si n es el número de libros que se venden, el precio será de $2.200n para n entre 1 y 24; este precio bajará a $2.000n para n entre 25 y 48; todo pedido mayor o igual que 49 tendrá un precio de $1.800n. ¿Conviene comprar 24 ó 25 ó 26 libros? ¿Para cuáles valores de n resulta más barato comprar más de n libros que comprar exactamente n libros? Trazar el gráfico que corresponde a esta situación y establecer las conclusiones a partir de éste.

INDICACIONES AL DOCENTE:

En este caso el gráfico que se obtiene es como el siguiente:



Es interesante que los estudiantes observen la variación de pendiente en cada tramo y su identificación con el precio unitario de los libros.

Ejemplo C

Los estudiantes de 3º Medio se hacen cargo cada año de la fotocopiadora del colegio para juntar fondos para su viaje de estudios.

Como todos los años, desean maximizar las ganancias y es por esto que se preocupan de estudiar el convenio con la empresa que arrienda la fotocopiadora y las reglas internas hacia los usuarios.

Un estudio sobre la gestión del año anterior dio los siguientes resultados:

- El convenio con la empresa consiste en un arriendo mensual fijo de $10 000 con derecho a mil fotocopias y un costo variable de $5 por fotocopia adicional.
- El costo de la fotocopia en el colegio fue de $20 durante todo el año.
- El número de fotocopias sacadas durante cada mes fue el siguiente: enero: 720, febrero: 510, marzo: 1 450, abril: 1.300, mayo: 1.253, junio: 1.357, julio: 951, agosto: 1.059, septiembre: 1.278, octubre: 1.190, noviembre: 1.370, diciembre: 1.025.

a) Calcular el valor pagado a la empresa durante los meses de febrero, marzo y abril del año pasado.

b) Estudiar el costo mensual que se debe pagar a la empresa en función del número de fotocopias sacadas durante el mes. Distinguir los casos en que el número de fotocopias es menor o igual que 1.000 o es mayor que 1.000.

c) Hacer un gráfico que resuma el estudio realizado.

INDICACIONES AL DOCENTE:

En el desarrollo de este ejemplo es importante que los alumnos y alumnas puedan comparar el tipo de análisis que se puede plantear desde la situación numérica y el que se puede realizar desde la propuesta gráfica. Se pueden considerar criterios tales como exactitud y predictibilidad.

Actividad 5

Describen analítica y gráficamente la función parte entera y la usan como modelo para el análisis de diversas situaciones.

Ejemplo A

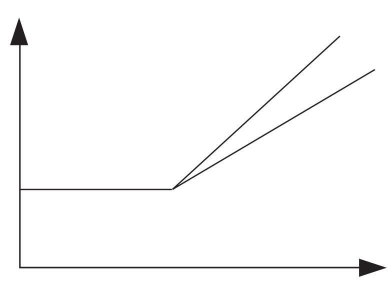
En una determinada ciudad todos los taxis cobran $150 por la "bajada de bandera", monto que permite recorrer los 800 metros iniciales; por cada tramo adicional de 200 metros, los taxis pueden cobrar $60, $70 u $80 según sea la opción de quien conduce o de común acuerdo entre el conductor y los pasajeros.

Si un taxi indica que su tarifa es $60, pero el taxímetro marca un incremento de $70 por cada tramo, ¿qué gráfico puede adecuarse para visualizar la diferencia que se acumula en el precio de un viaje?

Si al término de un viaje el taxímetro de ese taxi marca $2.600, ¿cuánto debiera cancelarse considerando que la información de tarifa que está a la vista del público es $60 por cada 200 metros? Ilustrar la situación con un gráfico.

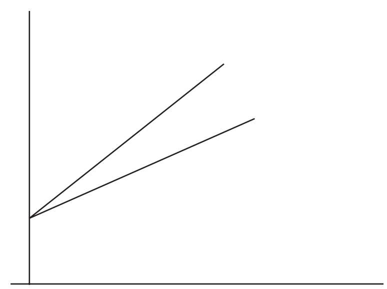
INDICACIONES AL DOCENTE:
El modelo que describe esta situación es el siguiente: en el eje x se ubican los metros recorridos y en el eje y el precio correspondiente.

Considerando las características del problema propuesto, y para establecer con mayor claridad visual la diferencia entre ambos precios, puede considerarse adecuada una representación del tipo siguiente:



Es importante seleccionar el modelo que se va utilizar considerando las condiciones del problema. En este caso se puede utilizar el gráfico de dos rectas para comparar las diferencias de precio o también se puede recurrir a una función escalonada.

También podría considerarse una representación de este tipo, en la que se omiten los primeros 800 metros.



Ejemplo B

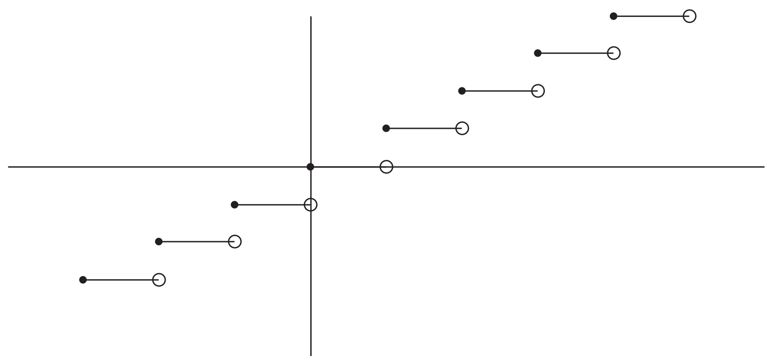
Estudiar y graficar la función parte entera: y = [x]. Para ello construir y analizar el cuadro siguiente:

x	enteros menores o iguales que x	y
2,45	2, 1, 0, ... -5, ...	2
0,095	0, -1, -2, ... -43, ...	0
-5,68	-6, -7, ... -10, ...	-6
-0,075	-1, - 2, -3 ...	-1
-3	-3, -4, -5 ...	-3
5	5, 4, 3, ...	5
Π	3, 2, 1, ...	3

INDICACIONES AL DOCENTE:

La función parte entera de x asocia a x el mayor entero que es menor o igual que x. Es posible que para los valores positivos de x, los estudiantes no cometan errores de interpretación, pero esto es más probable para los valores negativos de x. La tabla del ejemplo puede ser un buen apoyo para la superación de este error.

Su representación gráfica es la siguiente; será conveniente hacer algunas observaciones en relación con los puntos inicial y final de cada tramo.



Las diversas situaciones de precios por tramos de consumo son buenos contextos para el estudio de la función parte entera. Sin embargo esas situaciones sólo están referidas a valores positivos de x. Este modelo se extiende para valores positivos y negativos de las variables; parcialmente, un tramo de esta función se puede expresar como paralela al eje x, recurriendo a la función afín.

Ejemplo C

Graficar otras expresiones que incluyan la función parte entera; analizar los gráficos, constatar si hay valores para x en los que la expresión no tiene sentido.

- graficar $y = [2x]$ para $-3 \leq x \leq 4$;
- graficar $y = \frac{x}{[x]}$ para el intervalo [1,5];
- graficar $y = x - [x]$

INDICACIONES AL DOCENTE:
En este caso se podrían diversificar las actividades de los alumnos y alumnas; después de hacer estos gráficos, pueden presentar sus conclusiones al resto de sus compañeros y compañeras.

Actividad 6

Estudiar la función valor absoluto; la grafican e interpretan como la distancia al cero asociada a un punto de la recta numérica; la relacionan con la función lineal y analizan expresiones que la involucran.

Ejemplo A

- Utilizar valor absoluto para expresar la distancia entre -5 y 8.
- Calcular el incremento de temperatura entre una mínima de -4° y una máxima de 9,3°.
- Relacionar con la notación en valor absoluto.
- Determinar la distancia entre dos puntos a, b en la recta numérica.

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es importante que los alumnos y alumnas lleguen a tener como imagen de valor absoluto una distancia al punto cero en una recta numérica.

Ejemplo B

Resolver las ecuaciones siguientes

$|x| = 10$; $|2x + 9| = 15$ $|-3x| = 34$ $|x - 5| = -4$

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es importante que los ejercicios contribuyan a formar la imagen del valor absoluto como la distancia al cero, en la recta numérica. Se pueden proponer cálculos numéricos que incorporen la notación de valor absoluto para familiarizar a los estudiantes con este símbolo y su significado.

Ejemplo C

Graficar y analizar expresiones que involucren valor absoluto; analizar los gráficos, y su ubicación relativa al eje x e indicar los puntos en que éstos no tienen sentido.

$y = |x|$ $y = |x + 5|$ $y = -|x|$ $y = \frac{|x|}{|-x|}$ $y = \frac{x}{|x|}$

INDICACIONES AL DOCENTE:
Instar a los alumnos y alumnas a elaborar una tabla de valores para trazar el gráfico. Será conveniente enfatizar la particularidad de esta función que transforma los valores poniéndolos en positivo y que esto se visualiza en el gráfico por la curva que se ubica sobre el eje x.

En forma similar a las funciones de tipo escalonada, invitar a los estudiantes a expresar la función valor absoluto para un intervalo de valores de x, recurriendo a la función lineal o afín.

Por otra parte, los estudiantes tienen la oportunidad de graficar dos funciones tales que una es una constante para cualquier valor de x y la otra, para dos intervalos de la variable.

Actividades para la evaluación y ejemplos

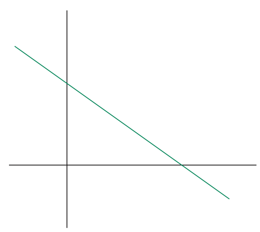
Las actividades siguientes son complementarias a las propuestas para el aprendizaje; destacan el aspecto evaluativo presente en el proceso de enseñanza y están ligadas a los aprendizajes esperados señalados en la parte inicial de la unidad, que son los que han orientado el desarrollo de la misma.

Actividad 1

Relacionan las formas gráfica y algebraica de una recta y reconocen sus parámetros.

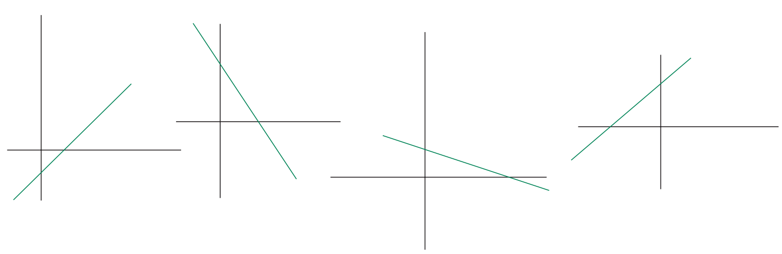
Ejemplo A

Determinar la ecuación de la recta del gráfico.



Ejemplo B

¿Cuál de los gráficos siguientes representa la recta $y = -\frac{1}{2}x + 2$?



Ejemplo C

Escribir la ecuación de una recta que pasa por el punto $(-3, -5)$.

Ejemplo D

Graficar las siguientes ecuaciones de recta y achurar la región comprendida entre ellas.
$x = -2$; $y = 5$; $x = 7$.

Ejemplo E

Graficar la ecuación $x - y = -3$.

Ejemplo F

Escribir la ecuación de una recta paralela a la recta $2x - y = 1$ y que pasa por (0,0).

Ejemplo G

Escribir las ecuaciones de un par de rectas perpendiculares entre sí.

Observar si:
i) relacionan la orientación de la recta con el signo de m;
ii) relacionan n con el punto de intersección de la recta con el eje y;
iii) relacionan la expresión gráfica con la algebraica y viceversa;
iv) distinguen las rectas paralelas a los ejes;
v) reconocen las condiciones para que dos ecuaciones sean rectas paralelas;
vi) reconocen las condiciones para que dos ecuaciones sean rectas perpendiculares.

Actividad 2

Resuelven problemas que se modelan por la ecuación de una recta.

Ejemplo A

La presión p que soporta un buzo bajo el agua está relacionada con la profundidad x por un ecuación de la forma $p = kx + 1$, en la que k es una constante. En la superficie la presión es una atmósfera. A 100 m de profundidad es de aproximadamente 10,90 atm.

Determinar la presión a 50 m. Calcular el valor de k.

Ejemplo B

En el contexto del ejemplo C de la actividad 4:

- Calcular las ganancias en los meses de febrero, marzo y abril.
- Calcular las ganancias obtenidas en el mes, según el número de fotocopias tomadas.
- Hacer un gráfico que resuma la información anterior.

Ejemplo C

Una cuenta de energía eléctrica señala como gasto fijo \$675. En el mes de abril se consumieron 65 Kwh y el total de la cuenta fue \$3.275. Si el modelo tarifario es lineal, ¿cuál fue el consumo del mes de mayo si la cuenta señala un total de \$3.795?

Observar si expresan la situación en relaciones numéricas correctas y si resuelven correctamente estas últimas.

Ejemplo D

Considerar la ecuación $my + (m - 1)x = m - 2$; para un valor determinado de m, esta ecuación representa una recta.

a) Determinar m para que esta recta pase por el punto (1, –1).
b) Determinar m para que la recta sea paralela al eje x.
c) Determinar m para que la recta pase por el origen.
d) ¿Qué se puede afirmar sobre la pendiente de cualquiera de las rectas que se generan para diversos valores de m?

Observar si:
i) identifican la condición que involucra cada subpunto y la traducen a la ecuación propuesta;
ii) hay alguna dificultad específica en relación con las condiciones propuestas en los subpuntos;
iii) si pese a conocer la condición pedida no la pueden expresar en la ecuación propuesta.

Actividad 3

Grafican e interpretan la función valor absoluto.

Ejemplo A

¿Qué valores puede tomar x para que $|-x| + |x| = 0$?

Ejemplo B

¿Qué valores puede tomar a para que $\frac{5}{a-|a|}$ tenga sentido?

Ejemplo C

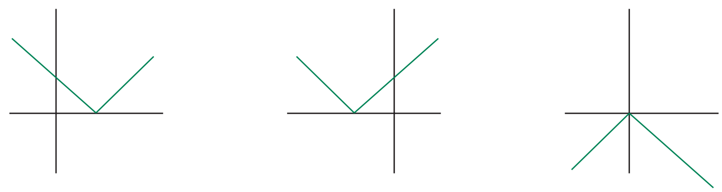
Graficar $y = |x| + 1$

Ejemplo D

Graficar $y = |x + 1|$

Ejemplo E

Expresar algebraicamente.



Ejemplo F

Resolver:

(a) $|x + 3| = 4$ (b) $|5x - 9| = 1$ (c) $|2x + 1| = -3$

Ejemplo G

Determinar los intervalos en los que se puede ubicar a en la recta numérica, para que satisfaga las siguientes proposiciones:

$5 < |a|$

$b < |a|$ con $10 < b < 20$

$|-3| < |a| < |3|$

Ejemplo H

Ubicar a, b, c en una recta numérica para que se cumpla:

$| a | < | b | < | c |$

Observar si:

i) consideran valores positivos y negativos para las variables involucradas;

ii) hacen tablas de valores para graficar una expresión;

iii) relacionan el gráfico con la expresión algebraica;

iv) reflejan la relación entre distancia al cero y valor absoluto.

Ejemplo I

Graficar la ecuación $|x| + |y| = 1$

Observar si:
i) hacen una tabla para hacer el gráfico;
ii) si utilizan valores positivos para los valores absolutos;
iii) si proponen valores mayores que 1 o menores que -1, para las variables;
iv) si tienen alguna forma sistemática para dar valores a las variables o es al azar;
v) si intuyen la forma del gráfico después de tener algunos valores que la insinúen.

Actividad 4

Grafican e interpretan la función parte entera.

Ejemplo

Graficar las siguientes funciones:

$y = \left[\frac{x}{2}\right] \qquad y = \frac{[x]}{2}$

Comparar los valores de ambas funciones para $x = 3{,}2$; para $x = -2{,}8$; para $x = 4{,}2$

Observar si:
i) hacen una tabla de valores para graficar las funciones;
ii) aplican correctamente la noción de función parte entera.

Unidad 6

Sistemas de ecuaciones lineales

Contenidos

a. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Gráfico de las rectas correspondientes.

b. Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones.
Análisis y pertinencia de las soluciones.

c. Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.

d. Distancia entre dos puntos en el plano

f. Evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII; aporte de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría.

Aprendizajes esperados

Los alumnos y alumnas:

1. Conocen métodos para resolver sistemas de ecuaciones y recurren al que estimen más conveniente.
2. Traducen problemas a sistemas de ecuaciones definiendo adecuadamente las incógnitas y los resuelven.
3. Relacionan las expresiones gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones y sus soluciones.
4. Aplican y relacionan los conceptos de ecuación de la recta, distancia entre dos puntos y propiedades de las figuras geométricas básicas, en la resolución de problemas.
5. Conocen algunos antecedentes históricos relativos a los aportes de R. Descartes acerca de la representación gráfica y la relación entre geometría y álgebra.

Orientaciones didácticas

La resolución de sistemas de ecuaciones es un tema tradicional en la enseñanza de matemática en la Educación Media. En el desarrollo de esta unidad se propone la enseñanza de la resolución de sistemas estrechamente ligada a la resolución de problemas; que las ecuaciones y las letras involucradas representen objetos que les den significado a la operatoria que con ellas se realizan.

Una de las mayores dificultades en el aprendizaje de este tema es la traducción de los enunciados de los problemas al lenguaje algebraico; específicamente al planteamiento de las ecuaciones. En la resolución de diversos problemas, los alumnos suelen verbalizar involucrando variados subentendidos. Por ejemplo, si dicen 'sea x los videos infantiles', en la resolución de algún problema relativo al tema, no explicitan si es el número de videos o si es el precio de los mismos u otro significado.

Generalmente los estudiantes aprenden cómo resolver sistemas de ecuaciones, pero tienen dificultades para hacer uso de esta herramienta en la resolución de problemas; de ahí la conveniencia de generar la resolución de sistemas de ecuaciones como una herramienta para la resolución de problemas.

Paralelamente, en el proceso de enseñanza se sugiere una ejercitación que permita un trabajo fluido y cómodo con esta operatoria. Es importante que los estudiantes adquieran destreza en los procesos de resolución de sistemas de ecuaciones, que los utilicen para la resolución de problemas.

Para dotar a los alumnos y alumnas de una mejor herramienta para la comprensión y relación matemática entre tópicos, es conveniente que esta unidad no se trabaje en forma aislada, sino que estrechamente relacionada con la ecuación de la recta, su expresión algebraica y gráfica; que los estudiantes relacionen las condiciones de solución de un sistema de ecuaciones lineales con las relaciones entre los coeficientes de las ecuaciones y su gráfico. Esta actividad se puede enriquecer con el uso de programas computacionales.

Actividades para el aprendizaje y ejemplos

Actividad 1

Resuelven problemas que involucran sistemas de ecuaciones; analizan la existencia y pertinencia de las soluciones.

Ejemplo A

Abrir un debate en relación con la situación siguiente: Una función de teatro organizada por el liceo, dejó $1.200.000 por la venta de entradas; éstas eran de dos tipos: galería, que costaban $2.000 y platea, $3.000.

Como antecedente para planificar eventos futuros, al liceo le interesa saber cuántas plateas y cuántas galerías se vendieron; esa información no la tienen. Los encargados de la venta anotaban G o P en las mismas entradas o bien, ponían 2.000 ó 3.000 según el tipo de entrada; esta era la única diferencia.

Al revisar la entradas recogidas en el ingreso a la función, que eran un total de 450, se dieron cuenta que algunas estaban en blanco y otras no eran claramente legibles. Además, la capacidad del teatro era de 400 plateas y 200 galerías.

¿Se puede saber cuántas galerías y plateas se vendieron?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Interesa que los estudiantes se den cuenta que la ecuación del tipo $2.000x + 3.000y = 1.200.000$, en la que x representa el total de galerías vendidas e y, el total de plateas vendidas, no basta para responder la pregunta.

Podría plantearse que sólo se vendieron las 400 plateas considerando que con esa venta se obtiene el total de dinero; o bien hacer una tabla con valores posibles, buscando por ensayo y error el número de galerías y plateas vendidas.

Recurrir a las formas de solución utilizadas por los alumnos y alumnas para explicar algunos de los métodos convencionales de resolución de sistemas.

Ejemplo B

En dos esquinas de una misma bocacalle se han instalado sendas oficinas que arriendan videos. En una, el sistema de arriendo considera una cuota anual de $1.500 y $1.200 por arriendo de cada video. La otra no incluye cuota anual y el arriendo de cada video es $1.350. Oscar arrienda generalmente, como 20 a 25 videos al año; ¿cuál de las dos ofertas le conviene más? ¿Cuál sistema le conviene más a una persona que arriende 10 películas anuales?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Puede ser muy interesante, considerando las características del curso, que los estudiantes trabajen en grupos y resuelvan este problema sin mayores indicaciones adicionales. En el análisis de las formas de solución, se espera que estén presente las tablas de valores y los gráficos; esto puede permitir relacionar ambas herramientas y comprobar las ventajas y desventajas de cada una de ellas.

Ejemplo C

Cecilia reemplazó a su mamá atendiendo la caja en la librería por un par de horas. Para hacer los recuentos semanales de existencia de artículos en la bodega, utilizan las boletas de compraventa, por lo que es necesario anotar la cantidad y el tipo de artículos vendido.

Al hacer el recuento de boletas, se constató que en una de ellas Cecilia anotó un total de 30 cuadernos y un valor de $21.000.

Si sólo hay dos tipos de cuadernos a la venta, unos de $500 y los otros de $800, ¿se puede calcular cuántos cuadernos de cada clase vendió?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Este ejemplo puede contribuir para que se den cuenta del tipo de problema que se puede resolver con esta herramienta.

Es interesante abrir espacios para conocer y explicar los métodos habituales de resolución de sistemas de ecuaciones.

Ejemplo D

En una bolsa hay un total de $8.500 distribuidos en 37 monedas de las que 25 son de $100 y el resto son de $500. De acuerdo a estos datos, Arturo y Bernardita escribieron dos sistemas de ecuaciones diferentes.

Arturo escribió las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 37 \\ 100\,x & + & 500\,y & = & 8.500 \end{array}$$

Bernardita planteó el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{array}{ccccc|} x & + & y & = & 8.500 \\ \frac{x}{500} & + & \frac{y}{100} & = & 37 \end{array}$$

¿Qué representan **x** e **y** en cada caso, en el contexto de la situación inicial?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Una de las dificultades importantes en el estudio de este tema es el reconocimiento de las incógnitas, las relaciones cuantitativas que se plantean entre ellas y traducirlas a las ecuaciones que corresponden.

Es habitual que en la resolución de problemas no se explicite con precisión qué significa cada una de las incógnitas y qué significado asumen con los coeficientes correspondientes; esto pasa a ser un subentendido que es conveniente explicitar.

Actividad 2

Resuelven sistemas de ecuaciones; analizan diferentes métodos, las relaciones entre los coeficientes de las variables, las soluciones del sistema de ecuaciones y las gráficas de las rectas. Incluir en esta ejercitación sistemas con solución única, con infinitas soluciones y sin solución.

Ejemplo A

Resolver sistemas de ecuaciones como los siguientes:

$$\begin{array}{l|} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 0 \end{array} \qquad \begin{array}{l|} 2x = 5 - 4y \\ 4 = y \end{array} \qquad \begin{array}{l|} x = y \\ x = 3 \end{array}$$

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es necesario apoyar a los estudiantes para que logren una fluidez en los procedimientos de resolución de sistemas de ecuaciones. Además interesa que desarrollen una capacidad de análisis crítico de los procedimientos utilizados y los resultados obtenidos.

Ejemplo B

En el sistema

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = 8 \\ 4x + ky = s \end{array}$$

- ¿Qué condiciones deben satisfacer k y s para que el sistema no tenga solución?
- ¿Qué condiciones deben satisfacer k y s para que el sistema tenga infinitas soluciones?
- ¿Qué condiciones para k y s para que el sistema tenga una solución?
- En cada uno de los casos anteriores, ¿qué caracteriza los gráficos de ambas rectas?

INDICACIONES AL DOCENTE:
Este problema abre un espacio para relacionar las expresiones gráfica y algebraica de los sistemas de ecuaciones.

Ejemplo C

Resolver sistemas de la forma

$$\begin{array}{l} y = 4 \\ y = |x + 3| \end{array}$$

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es conveniente que las alumnas y alumnos se aproximen a una concepción de matemática en que los conceptos y procedimientos están relacionados entre sí y no aislados. Puede ser interesante graficar ambas funciones y visualizar los puntos de intersección de ambas.

Si las condiciones del trabajo con el curso lo permiten, se puede ampliar este tema a la resolución de sistemas con tres incógnitas y a la resolución de sistemas de ecuaciones del tipo

$$\begin{array}{l} \frac{7}{x} - \frac{3}{y} = 5 \\ \frac{2}{x} - \frac{1}{y} = 7 \end{array}$$

En estos casos el uso de la variable auxiliar puede permitir el replanteamiento del problema como dos ecuaciones lineales. Generalmente los estudiantes suelen encontrar los valores para esas incógnitas auxiliares y no continúan para determinar los valores para x e y.

Ejemplo D

Inventar un sistema de ecuaciones suyas soluciones sean (–1, 2)

INDICACIONES AL DOCENTE:
Es más habitual pedirles a los alumnos y alumnas que resuelvan sistemas a que inventen algunos que tengan soluciones conocidas. Será interesante comparar los sistemas que se propongan como solución a este ejemplo.

Actividad 3

Resuelven problemas y desafíos aplicando conceptos y procedimientos asociados a la ecuación de la recta, distancia entre dos puntos, sistemas de ecuaciones y propiedades básicas de figuras geométricas.

Ejemplo A

Determinar la distancia entre los puntos (–1, 2) y (3, –4); entre (0, –3) y (0, 8)

Ejemplo B

Determinar la ecuación de la recta que:

pasa por los puntos (0,2) y (3,0)

pasa por el punto (5, –3) y es paralela al eje y

pasa por el punto (–1, 2) y es paralela a la recta x = y

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es interesante que los alumnos y alumnas asocien en el segundo caso del primer ejemplo, la distancia con el valor absoluto. Importa que compartan los procedimientos utilizados en cada caso. Conversaciones de este tipo se pueden constituir en fuentes de aprendizaje para algunos estudiantes.

Ejemplo C

Un cuadrado se ha dividido en 25 cuadraditos. Las medidas de los lados de 24 de ellos es igual a 1 cm. La medida de los lados del vigésimo quinto cuadrado es distinta de 1 cm. ¿Cuál es el área del cuadrado inicial?

INDICACIONES AL DOCENTE:

Este problema se presta para un primer acercamiento geométrico concreto, recurriendo, eventualmente, al papel cuadriculado. Posteriormente, será necesario llegar a una generalización planteando la ecuación de la igualdad de las áreas, para establecer que la solución obtenida por la vía geométrica es única.

Una vez resuelto el problema, es conveniente que los alumnos y alumnas ordenen sus argumentos, expliquen los procedimientos utilizados y constaten que la solución obtenida es correcta.

Ejemplo D

Calcular el área del triángulo que se forma por la intersección de la rectas

$y = 2$; $-y = 2x + 2$; $y - x = 1$

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es probable que algunos estudiantes aborden el problema por el camino de lo gráfico en tanto que otros prefieran la forma algebraica. Es conveniente que ellos visualicen que son caminos alternativos y que, considerando las condiciones del problema, uno puede resultar más sencillo que el otro.

Ejemplo E

Probar que los puntos (5, –13); (–3, 2); (12, 10) y (20, 5) son los vértices de un cuadrado.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Es necesario apoyar a los alumnos y alumnas para que incorporen el gráfico como herramienta para visualizar, en este ejemplo, cuáles son las rectas que interesa analizar o las distancias que van a calcular para resolver el problema planteado.

Ejemplo F

Resolver

$$x + [x] = 14{,}23$$
$$x + [x] = 15{,}24$$
$$2x + [x] = 15{,}24$$

Sugerencia: para el primer caso

considerar $x = [x] + y$, con $0 < y < 1$,

en consecuencia $x + [x] = 2[x] + y = 14{,}23$

necesariamente $y = 0{,}23$

luego, $[x] = 7$

$x = 7{,}23$

Actividad 4

Recogen información sobre algunos aportes de René Descartes a la representación gráfica; visualizan efectos en la reinterpretación de algunos problemas y el enriquecimiento de la relación entre geometría y álgebra.

INDICACIONES AL DOCENTE:

Será interesante para los alumnos y alumnas contextualizar la época en que vivió R. Descartes, su condición de filósofo, su aporte a la geometría. El aporte de R. Descartes marca un punto de encuentro entre el álgebra y la geometría.

Actividades propuestas para la evaluación y ejemplos

Las actividades siguientes son complementarias a las propuestas para el aprendizaje; destacan el aspecto evaluativo presente en el proceso de enseñanza y están ligadas a los aprendizajes esperados señalados en la parte inicial de la unidad, que son los que han orientado el desarrollo de la misma.

Actividad 1

Interpretan y resuelven sistemas de ecuaciones.

Ejemplo A

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 2x + 3y = -8 \\ -x - 2y = 4 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0,5y - x = 0 \\ 2x = 7,5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} |x| = 4,5 \\ y + x = 4 \end{array}$$

Observar si:

i) utilizan el mismo procedimiento en los tres casos o se adecuan a las características del sistema;

ii) tienen dificultades con los decimales;

iii) interpretan correctamente el valor absoluto.

Ejemplo B

Inventar un sistema de ecuaciones que presente tres ecuaciones y dos incógnitas, de modo que tenga solución única.

Observar si:

i) proponen un sistema con dos ecuaciones y agregan otra cualquiera;

ii) proponen un sistema, lo resuelven y agregan una tercera ecuación construida por ensayo y error con esa solución;

iii) proponen un sistema, buscan la solución y la tercera ecuación es una recta que pasa por ese punto;

iv) proponen las coordenadas de un punto y la ecuación de tres rectas que pasen por ese punto.

Actividad 2

Resuelven problemas que involucran sistemas de ecuaciones.

Ejemplo A

¿Cuántas gallinas y cuántos conejos hay en un corral si entre todos juntan 42 cabezas y 144 patas?

Ejemplo B

La relación entre dos números es de 2 es a 3. Si el menor aumenta en 8 y el mayor en 7, la relación es de 3 es a 4. Encontrar los números.

Ejemplo C

Un comerciante compra dos objetos por $21.000 y los vende en $22.200. Si en la venta de uno de estos objetos ganó el 10% y en la del otro perdió el 8% sobre el precio de la compra, ¿qué cantidad pagó por cada uno de dichos objetos?

Ejemplo D

En la cuenta de agua potable se facturó en octubre $6.021 por el consumo de 14 m^3 y en diciembre se facturó $10.981 por 28 m^3. Si se sabe que el modelo de cálculo de tarifa es de la forma $T = mx + n$, donde T es el monto a cancelar y x es el consumo en m^3. Determinar el valor de las constantes m y n.

Ejemplo E

En la medida en que el aire (sin humedad) sube, se expande y enfría. Si la temperatura a nivel de la tierra es 20º C y a 1 km de altura es 10º C. Escribir la relación entre altura y temperatura si se supone que existe una relación lineal entre ellas. Hacer el gráfico. Determinar la temperatura a 2,5 km de altura.

Observar si

i) traducen las relaciones cuantitativas a ecuaciones;
ii) expresan el problema como un sistema;
iii) resuelven el problema, utilizando sólo una ecuación;
iv) tienen dificultades con los porcentajes;
v) relacionan la solución de la ecuación con la respuesta al problema.

Ejemplo F

Probar que el triángulo ABC de coordenadas (4,2); (1,6); (8,5) es rectángulo.

Observar si:
i) grafican el triángulo;
ii) demuestran la perpendicularidad de acuerdo al dibujo;
iii) trabajan sin una línea conductora clara;
iv) recurren a las medidas de los trazos y aplican el Teorema de Pitágoras.

Ejemplo G

Establecer los vértices de un rombo de modo que uno sea el origen. Que anoten los cuatro vértices, grafiquen la figura y expliquen por qué esos cuatro puntos son los vértices de un rombo. Este trabajo se puede desarrollar en grupo.

Observar si:
i) organizan el trabajo a partir de lados paralelos y de igual medida;
ii) recurren a que las diagonales son perpendiculares en el punto medio;
iii) llegan a un cuadrado y lo explican como rombo especial.

Bibliografía

Alsina, Claudi (1995). *Viaje al país de los rectángulos*, Editorial Olimpíadas Matemáticas Argentina, Buenos Aires.

Campiglio, Alberto y Eugeni, Vincenzo (1992). *De los dedos a la calculadora. La evolución del sistema de cálculo*, Paidos, España.

Cord (1997). *Matemáticas aplicadas*, Santiago de Chile.

Coxeter, H. S. M; Greitzer, S. L. (1994). *Retorno a la Geometría*, Colección La Tortuga de Aquiles, DLS- Euler Editores, Madrid.

Dickenstein, Alicia (1994). *Matemax*, Libros del Quirquincho, Buenos Aires.

Gardner, Martín (1985). *Carnaval Matemático*, Alianza Editorial, España.

Guzmán, Miguel de (1992). *Tendencias innovadoras en Educación Matemática*, Edipubli, Buenos Aires.

Morris, Kline (1992). *Matemáticas para los estudiantes de humanidades*, Fondo de Cultura Económica, México.

Magnus, Hans (1998). *El diablo de los números*, Editorial Siruela, Madrid.

Matemáticas y Olimpíadas (1994). Sociedad de Matemáticas de Chile, Santiago de Chile.

Perero, Mariano (1994). *Historia e historias de matemáticas*, Grupo Editorial Iberoamericana, México.

Problemas 1, Olimpíadas Matemáticas, Argentina, Buenos Aires.

Santaló, Luis (1993). *La Geometría en la formación de profesores*, Red Olímpica, Buenos Aires.

Stewart, Ian (1998). *De aquí al infinito. Las matemáticas de hoy*, Crítica, Barcelona.

Tahan, Malba (1998). *El hombre que calculaba*, Editorial Limusa, México.

Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios Primer a Cuarto Año Medio

Matemática

Objetivos Fundamentales

1º
Primer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la proporcionalidad, del lenguaje algebraico inicial y de la congruencia de figuras planas.
2. Analizar aspectos cuantitativos y relaciones geométricas presentes en la vida cotidiana y en el mundo de las ciencias; describir y analizar situaciones, con precisión.
3. Utilizar diferentes tipos de números en diversas formas de expresión (entera, decimal, fraccionaria, porcentual) para cuantificar situaciones y resolver problemas.
4. Resolver problemas seleccionando secuencias adecuadas de operaciones y métodos de cálculo, incluyendo una sistematización del método ensayo-error; analizar la pertinencia de los datos y soluciones.
5. Percibir la matemática como una disciplina en evolución y desarrollo permanente.
6. Representar información cuantitativa a través de gráficos y esquemas; analizar invariantes relativas a desplazamientos y cambios de ubicación utilizando el dibujo geométrico.

2º
Segundo Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de la ecuación de la recta, sistemas de ecuaciones lineales, semejanza de figuras planas y nociones de probabilidad; iniciándose en el reconocimiento y aplicación de modelos matemáticos.
2. Analizar experimentos aleatorios e investigar sobre las probabilidades en juegos de azar sencillos, estableciendo las diferencias entre los fenómenos aleatorios y los deterministas.
3. Explorar sistemáticamente diversas estrategias para la resolución de problemas; profundizar y relacionar contenidos matemáticos.
4. Percibir la relación de la matemática con otros ámbitos del saber.
5. Analizar invariantes relativas a cambios de ubicación y ampliación o reducción a escala, utilizando el dibujo geométrico.

3º
Tercer Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de los sistemas de inecuaciones, de la función cuadrática, de nociones de trigonometría en el triángulo rectángulo y de variable aleatoria, mejorando en rigor y precisión la capacidad de análisis, de formulación, verificación o refutación de conjeturas.
2. Analizar información cuantitativa presente en los medios de comunicación y establecer relaciones entre estadística y probabilidades.
3. Aplicar y ajustar modelos matemáticos para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas.
4. Resolver desafíos con grado de dificultad creciente, valorando sus propias capacidades.
5. Percibir la matemática como una disciplina que recoge y busca respuestas a desafíos propios o que provienen de otros ámbitos.

4º
Cuarto Año Medio

Los alumnos y las alumnas desarrollarán la capacidad de:

1. Conocer y utilizar conceptos matemáticos asociados al estudio de rectas y planos en el espacio, de volúmenes generados por rotaciones o traslaciones de figuras planas; visualizar y representar objetos del espacio tridimensional.
2. Analizar informaciones de tipo estadístico presente en los medios de comunicación; percibir las dicotomías, determinista-aleatorio, finito-infinito, discreto-continuo.
3. Aplicar el proceso de formulación de modelos matemáticos al análisis de situaciones y a la resolución de problemas.
4. Reconocer y analizar las propias aproximaciones a la resolución de problemas matemáticos y perseverar en la sistematización y búsqueda de formas de resolución.
5. Percibir la matemática como una disciplina que ha evolucionado y que continua desarrollándose, respondiendo a veces a la necesidad de resolver problemas prácticos, pero también planteándose problemas propios, a menudo por el sólo placer intelectual o estético.

Contenidos Mínimos Obligatorios

1º
Primer Año Medio

I. Números y Proporcionalidad

1. Números

a. Distinción entre números racionales e irracionales. Aproximación y estimación de números irracionales. Estimaciones de cálculos, redondeos. Construcción de decimales no periódicos. Distinción entre una aproximación y un número exacto.

b. Análisis de la significación de las cifras en la resolución de problemas. Conocimiento sobre las limitaciones de las calculadoras en relación con truncar y aproximar decimales.

c. Resolución de desafíos y problemas numéricos, tales como cuadrados mágicos o cálculos orientados a la identificación de regularidades numéricas.

d. Comentario histórico sobre la invención del cero, de los números negativos y de los decimales.

e. Potencias de base positiva y exponente entero. Multiplicación de potencias.

2. Proporcionalidad

a. Noción de variable. Análisis y descripción de fenómenos y situaciones que ilustren la idea de variabilidad. Tablas y gráficos.

b. Proporcionalidad directa e inversa. Constante de proporcionalidad. Gráfico cartesiano asociado a la proporcionalidad directa e inversa (primer cuadrante).

c. Porcentaje. Lectura e interpretación de información científica y publicitaria que involucre porcentaje. Análisis de indicadores económicos y sociales. Planteo y resolución de problemas que perfilen el aspecto multi-

2º
Segundo Año Medio

I. Algebra y Funciones

1. Lenguaje algebraico

a. Expresiones algebraicas fraccionarias simples, (con binomios o productos notables en el numerador y en el denominador). Simplificación, multiplicación y adición de expresiones fraccionarias simples.

b. Relación entre la operatoria con fracciones y la operatoria con expresiones fraccionarias.

c. Resolución de desafíos y problemas no rutinarios que involucren sustitución de variables por dígitos y/o números.

d. Potencias con exponente entero. Multiplicación y división de potencias. Uso de paréntesis.

2. Funciones

a. Representación, análisis y resolución de problemas contextualizados en situaciones como la asignación de precios por tramos de consumo, por ejemplo, de agua, luz, gas, etc. Variables dependientes e independientes. Función parte entera. Gráfico de la función.

b. Evolución del pensamiento geométrico durante los siglos XVI y XVII; aporte de René Descartes al desarrollo de la relación entre álgebra y geometría.

c. Ecuación de la recta. Interpretación de la pendiente y del intercepto con el eje de las ordenadas. Condición de paralelismo y de perpendicularidad.

d. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Gráfico de las rectas. Planteo y resolución de problemas y desafíos que involucren sistemas de ecuaciones. Análisis y pertinencia de las soluciones.

3º
Tercer Año Medio

I. Algebra y Funciones

1. Algebra

a. Raíces cuadradas y cúbicas. Raíz de un producto y de un cuociente. Estimación y comparación de fracciones que tengan raíces en el denominador.

b. Sistemas de inecuaciones lineales sencillas con una incógnita. Intervalos en los números reales. Planteo y resolución de sistemas de inecuaciones con una incógnita. Análisis de la existencia y pertinencia de las soluciones. Relación entre las ecuaciones y las inecuaciones lineales.

2. Funciones

a. Función cuadrática. Gráfico de las siguientes funciones:

$y = x^2$

$y = x^2 \pm a,\ a > 0$

$y = (x \pm a)^{2,\ a > 0}$

$y = ax^2 + bx + c$

Discusión de los casos de intersección de la parábola con el eje x. Resolución de ecuaciones de segundo grado por completación de cuadrados y su aplicación en la resolución de problemas.

4º
Cuarto Año Medio

I. Algebra y Funciones

a. Función potencia: $y = a\,x^n$, $a > 0$, para $n = 2, 3$ y 4, y su gráfico correspondiente. Análisis del gráfico de la función potencia y su comportamiento para distintos valores de a.

b. Funciones logarítmica y exponencial, sus gráficos correspondientes. Modelación de fenómenos naturales y/o sociales a través de esas funciones. Análisis de las expresiones algebraicas y gráficas de las funciones logarítmica y exponencial. Historia de los logaritmos; de las tablas a las calculadoras.

c. Análisis y comparación de tasas de crecimiento. Crecimiento aritmético y geométrico. Plantear y resolver problemas sencillos que involucren el cálculo de interés compuesto.

e. Uso de programas computacionales de manipulación algebraica y gráfica.

plicativo del porcentaje. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Relación entre porcentaje, números decimales y fracciones.

d. Planteo y resolución de problemas que involucren proporciones directa e inversa. Análisis de la pertinencia de las soluciones. Construcción de tablas y gráficos asociados a problemas de proporcionalidad directa e inversa. Resolución de ecuaciones con proporciones.

e. Relación entre las tablas, los gráficos y la expresión algebraica de la proporcionalidad directa e inversa. Relación entre la proporcionalidad directa y cuocientes constantes y entre la proporcionalidad inversa y productos constantes.

II. Algebra y Funciones

a. Sentido, notación y uso de las letras en el lenguaje algebraico. Expresiones algebraicas no fraccionarias y su operatoria. Múltiplos, factores, divisibilidad. Transformación de expresiones algebraicas por eliminación de paréntesis, por reducción de términos semejantes y por factorización. Cálculo de productos, factorizaciones y productos notables.

b. Análisis de fórmulas de perímetros, áreas y volúmenes en relación con la incidencia de la variación de los elementos lineales y viceversa.

c. Generalización de la operatoria aritmética a través del uso de símbolos. Convención de uso de los paréntesis.

d. Comentario histórico sobre la evolución del lenguaje algebraico.

e. Demostración de propiedades asociadas a los conceptos de múltiplos, factores y divisibilidad. Interpretación geométrica de los productos notables.

f. Ecuación de primer grado. Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita. Planteo y resolución de problemas que involucren ecuaciones de primer grado con una incógnita. Análisis de los datos, las soluciones y su pertinencia.

Relación entre las expresiones gráficas y algebraicas de los sistemas de ecuaciones lineales y sus soluciones.

e. Función valor absoluto; gráfico de esta función. Interpretación del valor absoluto como expresión de distancia en la recta real.

f. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

a. Semejanza de figuras planas. Criterios de semejanza. Dibujo a escala en diversos contextos.

b. Teorema de Thales sobre trazos proporcionales. División interior de un trazo en una razón dada. Planteo y resolución de problemas relativos a trazos proporcionales. Análisis de los datos y de la factibilidad de las soluciones.

c. Teoremas relativos a proporcionalidad de trazos, en triángulos, cuadriláteros y circunferencia, como aplicación del Teorema de Thales. Relación entre paralelismo, semejanza y la proporcionalidad entre trazos. Presencia de la geometría en expresiones artísticas; por ejemplo, la razón áurea.

d. Ángulos del centro y ángulos inscritos en una circunferencia. Teorema que relaciona la medida del ángulo del centro con la del correspondiente ángulo inscrito. Distinción entre hipótesis y tesis. Organización lógica de los argumentos.

e. Uso de algún programa computacional geométrico que permita medir ángulos, y ampliar y reducir figuras.

---

b. Función raíz cuadrada. Gráfico de: $y = \sqrt{x}$, enfatizando que los valores de x, deben ser siempre mayores o iguales a cero. Identificación de $\sqrt{x^2} = |x|$. Comentario histórico sobre los números irracionales; tríos pitagóricos; comentario sobre el Teorema de Fermat.

c. Uso de algún programa computacional de manipulación algebraica y gráfica.

II. Geometría

a. Demostración de los Teoremas de Euclides relativos a la proporcionalidad en el triángulo rectángulo.

b. Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo.

c. Resolución de problemas relativos a cálculos de alturas o distancias inaccesibles que pueden involucrar proporcionalidad en triángulos rectángulos. Análisis y pertinencia de las soluciones. Uso de calculadora científica para apoyar la resolución de problemas.

III. Estadística y Probabilidad

a. Variable aleatoria: estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.

b. Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.

c. Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.

II. Geometría

a. Resolución de problemas sencillos sobre áreas y volúmenes de cuerpos generados por rotación o traslación de figuras planas. Resolución de problemas que plantean diversas relaciones entre cuerpos geométricos; por ejemplo, uno inscrito en otro.

b. Rectas en el espacio, oblicuas y coplanares. Planos en el espacio, determinación por tres puntos no colineales. Planos paralelos, intersección de dos planos. Ángulos diedros, planos perpendiculares, intersección de tres o más planos. Coordenadas cartesianas en el espacio.

III. Estadística y Probabilidad

a. Graficación e interpretación de datos estadísticos provenientes de diversos contextos. Crítica del uso de ciertos descriptores utilizados en distintas informaciones.

b. Selección de diversas formas de organizar, presentar y sintetizar un conjunto de datos. Ventajas y desventajas. Comentario histórico sobre los orígenes de la estadística.

c. Uso de planilla de cálculo para análisis estadístico y para construcción de tablas y gráficos.

d. Muestra al azar, considerando situaciones de la vida cotidiana; por ejemplo, ecología, salud pública, control de calidad, juegos de azar, etc. Inferencias a partir de distintos tipos de muestra.

III. Geometría

1. Congruencia

a. Congruencia de dos figuras planas. Criterios de congruencia de triángulos.

b. Resolución de problemas relativos a congruencia de trazos, ángulos y triángulos. Resolución de problemas relativos a polígonos, descomposición en figuras elementales congruentes o puzzles con figuras geométricas.

c. Demostración de propiedades de triángulos, cuadriláteros y circunferencia, relacionadas con congruencia. Aporte de Euclides al desarrollo de la Geometría.

2. Transformaciones

a. Traslaciones, simetrías y rotaciones de figuras planas. Construcción de figuras por traslación, por simetría y por rotación en 60, 90, 120 y 180 grados.

   Traslación y simetrías de figuras en sistemas de coordenadas.

b. Análisis de la posibilidad de embaldosar el plano con algunos polígonos. Aplicaciones de las transformaciones geométricas en las artes, por ejemplo, M.C. Escher.

c. Clasificación de triángulos y cuadriláteros considerando sus ejes y centros de simetría.

d. Uso de regla y compás; de escuadra y transportador; manejo de un programa computacional que permita dibujar y transformar figuras geométricas.

III. Estadística y Probabilidad

a. Juegos de azar sencillos; representación y análisis de los resultados; uso de tablas y gráficos. Comentarios históricos acerca de los inicios del estudio de la probabilidad.

b. La probabilidad como proporción entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles, en el caso de experimentos con resultados equiprobables. Sistematización de recuentos por medio de diagramas de árbol.

c. Iteración de experimentos sencillos, por ejemplo, lanzamiento de una moneda; relación con el triángulo de Pascal. Interpretaciones combinatorias.

"...haz capaz a tu escuela de todo lo grande
que pasa o ha pasado por el mundo."

Gabriela Mistral

EDUCACION
Nuestra Riqueza

GOBIERNO DE CHILE
MINISTERIO DE EDUCACION

www.mineduc.cl

Matemática Segundo Año Medio